

Guías de problemas y parciales resueltos de QFT

Primer cuatrimestre de 2018



Sobre estos apuntes Estos apuntes/resueltos que usted está viendo fueron creados por un alumno mientras cursaba la materia. Es por ello que podrían haber errores de tipeo, errores conceptuales, de interpretación en los resultados, etc. Use estos apuntes con precaución. Estos apuntes no son oficiales de ninguna cátedra. En caso de notar algún efecto adverso suspenda inmediatamente su uso y consulte con su profesor de cabecera.

- El alumno cursó la materia durante el primer cuatrimestre de 2018, [este link](#) conduce a la página de la materia.
- Encontrá más resueltos de Alf en [este link](#).

Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?

Estos apuntes están hechos usando un programa llamado [Lyx](#)^a. Para hacer los dibujos se usó [Inkscape](#) y después se insertó las imágenes en formato [svg](#)^b directamente en Lyx sin conversión alguna.

En [este repositorio de GitHub](#) se encuentra la plantilla (*template*) que Alf usa actualmente, con todo lo necesario para compilarla y empezar a divertirse.

^aLyx es una interfaz gráfica para Latex que hace que la escritura se vuelva extremadamente fluida y veloz (al punto de poderse tomar apuntes en vivo durante una clase).

^bsvg es el formato nativo de Inkscape.

Sobre la notación Intentaré mantener una notación lo más consistente posible y que permita diferenciar de forma clara los distintos “objetos matemáticos” que se usan en esta materia sin ambigüedad alguna. La notación que intentaré usar siempre (aunque a veces es complicado así que no garantizo nada) es:

Notación	Descripción
$\langle \psi , \psi\rangle, \langle \psi \phi \rangle$	Bras, kets y brakets (estándar).
\bar{A}	Operador A (operador que actúa sobre los elementos del espacio de Hilbert $ \psi\rangle \in \mathcal{H}$).
\mathbf{A}	Vector 3D (no operador).
$\underline{\mathbf{A}}$	Operador vectorial 3D.
$\hat{\mathbf{x}}$	Versor 3D (vector de módulo 1, no operador).
$\overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_y}, \overline{\sigma_z}$	Matrices de Pauli vistas como operadores sobre los elementos del espacio de Hilbert.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Matrices de Pauli vistas como matrices (valga la redundancia).
1	Número 1.
$\mathbb{1}$	Matriz identidad.

$\bar{1} \equiv \underline{1}$	Operador identidad del espacio de Hilbert.
$\cancel{A} \equiv A^\mu \gamma_\mu$	Feynman slash notation.
$e^{ikx} \equiv e^{ik^\mu k_\mu}$	Contracción de dos cuatrivectores en el exponente.
$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \neq e^{ikx}$	Producto escalar de las componentes espaciales $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$.
k	Cuadrivector $k = [k^0 \quad k^1 \quad k^2 \quad k^3]$.
\mathbf{k}	Componentes espaciales del cuadrivector k , $\mathbf{k} = [k^1 \quad k^2 \quad k^3]$.
$\partial_{\underline{x}\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial_{\underline{y}\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial y^\mu}$	Cuando sea necesario diferenciar en qué frame se evalúa al operador ∂ , lo indicaré así.

Índice

I Guías de problemas	6
Guía 1	6
Problema 1	7
Problema 2	8
Ítem a	8
Ítem b	9
Problema 6 (duda al final)	10
Problema 7	11
Problema 11	12
Ítem a	12
Problema 12	14
Ítem a	14
Ítem b	14
Ítem c	15
Problema 13	15
Ítem a	15
Ítem b	16
Problema 14	18
Ítem a	19
Guía 2 - Formulación lagrangiana	21
Problema 1 (guía vieja!)	21
Ítem a	21
Ítem b	21
Ítem c	22
Problema 1	22
Ítem a	22
Ítem b	22
Problema 2	23
Ítem a (hay una duda mágica)	23
Ítem b	25
Ítem c y d	27
Problema 5	29
Ítem a	29
Ítem b (me faltan las soluciones generales de Dirac bien escritas)	30
Guía 3 - Cuantización canónica de Klein-Gordon	31
Problema 1	31
Ítem a	31
Ítem b	31
Problema 3	32
Ítem a (duda y además validar que esté bien hecho)	32
Ítem b	36
Problema 7	36
Ítem a	36
Problema 15	37
Ítem a (error de cuenta?)	37
Ítem b (ni idea)	38
Ítem c (Falta resolver!)	38
Guía 4A - Cuantización canónica del campo de Dirac	39
Problema 1	39
Problema 2	39
Ítem a (resultado raro)	39
Problema 4	42
Problema 8	43
Ítem a	43

Guía 4B - Cuantización canónica de campos de espín y helicidad 1	46
Problema 1	46
Ítem a	46
Ítem b	47
Problema 5 (Preguntar)	47
Guía 5A - Interacciones y cálculo perturbativo de amplitudes de scattering	48
Teoría de procesos de scattering	48
El picture de interacción	48
Perturbaciones (serie de Dyson) (preguntas)	49
Problema 1	51
Ítem a	51
Ítem b	51
Problema 6 (falta lo de campo complejo)	51
Problema 7	51
Ítem a	52
Ítem b (ni idea, preguntar!)	52
Ítem c (falta ítem b)	53
Problema 8 (PREGUNTA)	53
Solución sin diagramas de Feynman	53
Solución con diagramas de Feynman	56
Problema 10	56
Problema 11	56
Ítem b (scattering de Moller) (reglas de Feynman para QED paso a paso)	56
Ítem a (scattering de Bhabha) (averiguar si está bien + duda)	59
Ítem e (scattering de Compton)	59
Ítem c (aniquilación de pares)	60
Ítem d (creación de pares)	60
Reglas de Feynman: cómo hallarlas	60
Construcción de diagramas de Feynman para dummies	61
Problema 12 (Averiguar si está bien)	62

II Parciales **65**

Parcial del primer cuatrimestre de 2015 **65**

Problema 1 (probablemente esté todo mal)	65
Ítem a	65
Ítem b	65
Problema 2	65
Ítem a	66
Ítem b	67
Ítem c	68
Problema 3	68
Ítem a	68
Ítem b	69

Parcial del primer cuatrimestre de 2016 **71**

Problema 1	71
Ítem a	71
Ítem b	73
Ítem c	74
Ítem d (no me terminó de dar)	74
Problema 2	75
Ítem a (Noether bien paso a paso ✓)	75
Problema 3	79
Ítem a	79
Ítem b (corroborar que esté bien)	81
Ítem c (cómo se hace la cuenta???)	81

Fórmulas QFT **83**

Índice de *boxes*

1.	Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?	1
2.	Box 2 - Notación de índices	6
3.	Box 3 - El grupo ortogonal	7
4.	Box 4 - El grupo <i>special orthogonal</i> (rotaciones)	8
5.	Box 5 - e^{matriz}	8
6.	Box 6 - El grupo de Lorentz	10
7.	Box 7 - Propiedades de la métrica de Minkowsky	10
8.	Box 8 - Subdivisiones del grupo de Lorentz	11
9.	Box 9 - La matriz inversa y la notación de índices	12
10.	Box 10 - Sobre el símbolo \approx	14
11.	Box 11 - Generadores del grupo de Lorentz	17
12.	Box 12 - Matriz de transformación de espinores	18
13.	Box 13 - Sobre las álgebras; los grupos y las representaciones	18
14.	Box 14 - Teorema de Noether	23
15.	Box 15 - Transformación de simetría	25
16.	Box 16 - Sobre el signo de las exponenciales	31
17.	Box 17 - Teorema de Wick	50
18.	Box 18 - Propiedad re copada de producto interno y traza del producto tensorial	82
19.	Box 19 - Identidades matemáticas	83
20.	Box 20 - Notación de índices	83
21.	Box 21 - Fórmulas grupo de Lorentz	83
22.	Box 22 - Fórmulas formulación lagrangiana	84
23.	Box 23 - Fórmulas Klein-Gordon	84
24.	Box 24 - Fórmulas Dirac	85
25.	Box 25 - Fórmulas Proca y Maxwell	87
26.	Box 26 - Fórmulas scattering	87
27.	Box 27 - Reglas de Feynman para teoría $\lambda\phi^4$ con ϕ real (para matriz de scattering)	88
28.	Box 28 - Fórmulas QED	88
29.	Box 29 - Sección eficaz	89

Parte I

Guías de problemas

Guía 1

Box 2 - Notación de índices

Notación incómoda pero explícita $[[x, S]] \stackrel{\text{def}}{=}$ "las coordenadas del tensor x en el frame S ".

- $[[x, S]]^\mu$ son las componentes (contravariantes) tensor x de rango $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el frame S , normalmente denotadas simplemente como x^μ . Es decir

$$[[x, S]]^\mu \equiv \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Similarmente $[[x, S']]^\mu$ son las coordenadas en el frame S' , denotadas normalmente como x'^μ o $x^{\mu'}$, según el autor. Nótese que los números $[[x, S]]^\mu \neq [[x, S']]^\mu$ aunque representan al mismo objeto x .

- $[[x, S]]_\mu$ son las componentes (covariantes) del tensor x de rango $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en el frame S , es decir

$$[[x, S]]_\mu \equiv [t \quad -x \quad -y \quad -z]$$

normalmente denotadas simplemente como x_μ .

- Los tensores contravariantes y covariantes viven en espacios distintos, no se pueden sumar. Es decir

$$x^\mu + x_\mu \rightarrow \text{Está mal!}$$

Para hacer una analogía con los bras y los kets creo que se puede decir

Relatividad	Analogía en cuántica	
x	ψ	Nombre del objeto al que se hace referencia
x^μ	$ \psi\rangle$	Elemento del espacio "principal"
x_μ	$\langle\psi $	Elemento del espacio dual
$x^\mu x_\mu$	$\langle\psi \psi\rangle$	Producto interno
η^μ_ν	\dagger	Objeto usado para pasar del espacio "principal" al dual

- La relación entre $[[x, S]]^\mu$ y $[[x, S]]_\mu$ viene dada por $[[x, S]]^\mu = \eta^\mu_\nu [[x, S]]_\nu$ donde η^μ_ν son las coordenadas del tensor η , la métrica de Minkowsky.
- La métrica de Minkowsky η es un tensor que tiene componentes

$$[[\eta, S]]_{\mu\nu} = [[\eta, S]]^{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Métrica de Minkowsky}$$

para cualquier frame (inercial) S . Obsérvese que $[[\eta, S]]^\mu_\mu = \delta^\mu_\mu$ (trivial haciendo la cuenta).

- Si A y B son dos frames inerciales tales que el frame B tiene una velocidad $\beta = \beta\hat{x}$ visto desde el frame A entonces se los puede relacionar mediante una transformación de Lorentz caracterizada por la matriz

$$\Lambda_{A \rightarrow B} \rightarrow \text{es una matriz, no un tensor!}$$

cuyas componentes son

$$\Lambda_{A \rightarrow B}^{\mu \nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda_{B \rightarrow A}^{\mu \nu} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

La ubicación de los índices $\mu \nu$ es convencional ya que no hay uno contravariante y otro covariante. Normalmente a la matriz $\Lambda_{A \rightarrow B}$ se la llama simplemente Λ y sus componentes se denotan por $\Lambda^{\mu \nu}$. Obsérvese que son inversas:

$$\Lambda_{A \rightarrow B} \Lambda_{B \rightarrow A} = 1 \quad \equiv \quad \Lambda_{A \rightarrow B}^{\mu \rho} \Lambda_{B \rightarrow A}^{\rho \nu} \stackrel{?}{=} \begin{cases} \delta_{\mu\nu} & \rightarrow \text{Esto no es un tensor} \\ \delta^{\mu\mu} & \rightarrow \text{Esto es un tensor} \end{cases}$$

- Si x es un tensor de rango $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y A y B son dos frames relacionados por la transformación de Lorentz caracterizada por $\Lambda_{A \rightarrow B} \equiv \Lambda$ entonces

$$[[x, B]]^{\mu} = \Lambda^{\mu \nu} [[x, A]]^{\nu}$$

lo cual habitualmente se denota simplemente como $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu \nu} x^{\nu}$.

Problema 1

Si la forma cuadrática $x^T x$ se mantiene invariante frente a la transformación lineal $y = Mx$ entonces

$$\begin{aligned} x^T x &= y^T y \\ &= (Mx)^T (Mx) \\ &= x^T M^T M x \end{aligned}$$

por lo tanto $M^T M = \mathbb{1}$ o bien

$$M^T = M^{-1}$$

Esto define al grupo ortogonal

Box 3 - El grupo ortogonal

A nivel matemático el grupo ortogonal en D dimensiones está definido por

$$\mathbf{O}(D) \stackrel{\text{def}}{=} (\{M \in \mathbb{R}^{D \times D} | M^T = M^{-1}\}, \cdot) \rightarrow \text{Grupo ortogonal}$$

siendo $\{M | M^T = M^{-1}\}$ el conjunto de todas las matrices reales tales que $M^T = M^{-1}$ y \cdot la operación de multiplicación de matrices.

Usualmente se da por obvio que $\mathbf{O}(D)$ es un grupo respecto al producto y se anota simplemente el conjunto.

Propiedades de $M \in \mathbf{O}(D)$

- $M^T M = \mathbb{1}$ (por definición de $\mathbf{O}(D)$).
- $\det M = \pm 1$.
- La transformación Mx es
 - una rotación cuando $\det M = 1$ (ver grupo $\mathbf{SO}(D)$) o
 - una reflexión cuando $\det M = -1$ (no estamos interesados en esto).

Box 4 - El grupo special orthogonal (rotaciones)

El grupo *special orthogonal* en D dimensiones está definido como

$$\mathbf{SO}(D) \stackrel{\text{def}}{=} (\{M \in \mathbb{R}^{D \times D} | M^T = M^{-1} \text{ y } \det M = 1\}, \cdot)$$

siendo $\{M \in \mathbb{R}^{D \times D} | M^T = M^{-1} \text{ y } \det M = 1\}$ el subconjunto de las matrices que forman $\mathbf{O}(D)$ que en particular tienen determinante positivo.

Propiedades de $M \in \mathbf{SO}(D)$

- $M^T M = \mathbf{1}$ (por definición de $\mathbf{SO}(D)$).
- $\det M = 1$ (por definición de $\mathbf{SO}(D)$).
- $M = e^\Sigma$ siendo $\Sigma \in \mathbb{R}^{D \times D}$ una matriz antisimétrica.
 - Las matrices antisimétricas Σ forman un álgebra de Lie (es decir que forman un grupo con respecto a la operación binaria “conmutador”).
- La transformación $y = Mx$ es una rotación.
- Todas las $M \in \mathbf{SO}(D)$ se pueden parametrizar usando $\frac{D(D-1)}{2}$ parámetros (i.e. $\frac{D(D-1)}{2}$ es la dimensión de $\mathbf{SO}(D)$).

Box 5 - e^{matriz}

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, entonces

- $e^A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.
- $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$.
- $\det e^A = e^{\text{tr}A}$.
- $\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA}$.
- $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$.
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ (sale de poner $A = B$ en la propiedad $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$).
- $(e^A)^{\mu\nu} \neq e^{A^{\mu\nu}}$ (es obvio, pero uno puede caer en la tentación).

Problema 2

Ítem a

Si $M \in \mathbf{SO}(D)$ entonces $M^T = M^{-1}$. Reemplazando $M = e^\Sigma$ entonces

$$\begin{aligned} (e^\Sigma)^T &= (e^\Sigma)^{-1} \\ \text{Serie de } e^x &\rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Sigma^k}{k!} \right)^T = e^{-\Sigma} \leftarrow \text{Ver demostración más abajo} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Sigma^T)^k}{k!} &= \leftarrow \text{Trivial} \\ \exp(\Sigma^T) &= \exp(-\Sigma) \end{aligned}$$

Debido a que e^M es una función inyectiva entonces necesariamente los argumentos son iguales, es decir que

$$\Sigma^T = -\Sigma$$

Para ver que $e^{-\Sigma} = (e^{\Sigma})^{-1}$ se considera lo siguiente:

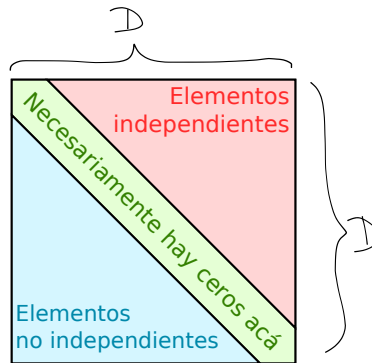
$$\begin{aligned} e^{\Sigma-\Sigma} &= e^{\Sigma}e^{-\Sigma} \leftarrow \text{Pues } [\Sigma, -\Sigma] = 0 \\ e^0 &= \\ \mathbb{1} &= \end{aligned}$$

por lo tanto $e^{-\Sigma}$ es la inversa de e^{Σ} , es decir que

$$e^{-\Sigma} = (e^{\Sigma})^{-1}$$

Ítem b

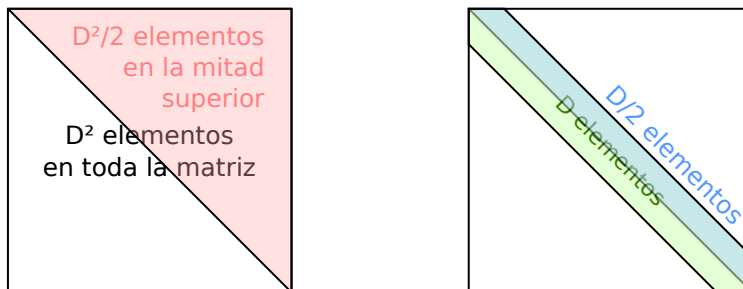
Las matrices Σ son matrices antisimétricas en $\mathbb{R}^{D \times D}$. La cantidad de dimensiones independientes de este conjunto corresponde a la cantidad de elementos que hay arriba de la diagonal, es decir para una matriz de $D \times D$ antisimétrica se tiene que



por lo tanto la cantidad de elementos independientes es

$$\begin{aligned} \# \text{dim independientes} &= \begin{cases} \# \text{de elementos en triángulo de arriba} \\ \# \text{de elementos totales} - \# \text{de elementos en diagonal} - \# \text{de elementos en el triángulo de abajo} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{D^2 - D}{2} \\ D^2 - D - \frac{D^2 - D}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

No se me ocurre una forma fácil de ver por qué el número de elementos de cada triángulo es $\frac{D^2-D}{2}$, pero se me ocurre lo siguiente (que es medio cabeza pero funciona):



la mitad de arriba de la matriz tiene $\frac{D^2}{2}$ elementos (es decir a cada elemento de la diagonal lo parto a la mitad). Además la diagonal tiene D elementos (esto es posta) por lo tanto la “mitad superior de la diagonal” tiene $\frac{D}{2}$ elementos (los partí a la mitad). En consecuencia el $\#$ de elementos en el triángulo de arriba = $\#$ de elementos en mitad superior - $\#$ de elementos en media diagonal = $\frac{D^2}{2} - \frac{D}{2} = \frac{D(D-1)}{2}$.

En consecuencia de todo lo anterior las matrices antisimétricas Σ de $D \times D$ generan un espacio de $\frac{D(D-1)}{2}$ dimensiones. Debido a que $M = e^{\Sigma}$ generan $\mathbf{SO}(D)$ y a que e^x es una función inyectiva entonces cada Σ se relaciona unívocamente con cada matriz M y entonces la dimensión de $\mathbf{SO}(D)$ es $\frac{D(D-1)}{2}$.

Problema 6 (duda al final)

Las matrices Λ deben satisfacer que $y = \Lambda x$ mantiene invariante a la forma cuadrática $x^T \eta x$, es decir

$$\begin{aligned} x^T \eta x &= y^T \eta y \leftarrow \text{Forma cuadrática invariante} \\ &= (\Lambda x)^T \eta \Lambda x \\ &= x^T \Lambda^T \eta \Lambda x \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \rightarrow \text{Condición para } \Lambda$$

El conjunto de todas las matrices Λ que satisfacen la relación anterior define el grupo de Lorentz:

Box 6 - El grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz se define como

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} (\{ \Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \equiv \eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \}, \cdot)$$

donde $\eta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ es la métrica de Minkowsky y \cdot es la operación de multiplicación de matrices Λ .

Propiedades de $\Lambda \in \mathcal{L}$

- $\det \Lambda = \pm 1$.
- $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ es equivalente a $\Lambda^T = \eta \Lambda^{-1} \eta$ (pues $\eta = \eta^T$).
- $\Lambda = e^\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ los generadores del grupo de Lorentz que satisfacen $\lambda^T = \eta \lambda$ (no sé cómo es en notación de índices).
- $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ (ver cuentita en box 9 y/o [este link](#)).
- $\Lambda^\mu{}_\nu$ NO es un tensor, es una matricita. Ver [este link](#) (además lo pregunté en clase).
 - Son $\Lambda_{\mu\nu}, \Lambda^{\mu\nu}$ y $\Lambda_\mu{}^\nu$ tensores? No lo sé, lo pregunté en [este link](#).

Box 7 - Propiedades de la métrica de Minkowsky

- η no es una simple matriz, es un tensor.
- $\eta^k = \begin{cases} \eta & \text{si } k \text{ es impar} \\ \mathbb{1} & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$.
- $\eta e^M \eta = e^{\eta M \eta}$.
- $\eta^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu$.

La consigna pide probar que las matrices λ definidas por $e^\lambda = \Lambda$ satisfacen

$$\begin{cases} \lambda_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\rho} \lambda^\rho{}_\nu \\ \lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu} \end{cases} \iff \eta_{\mu\rho} \lambda^\rho{}_\nu = \lambda_{\nu\mu} \iff \eta \lambda = \lambda^T$$

Para ello utilizo el hecho de que $\Lambda \in \mathcal{L}$ por lo que

$$\begin{aligned} \Lambda^T &= \eta \Lambda^{-1} \eta \\ (e^\lambda)^T &= \eta (e^\lambda)^{-1} \eta \\ e^{\lambda^T} &= \eta e^{-\lambda} \eta \\ e^{\lambda^T} &= e^{-\eta \lambda \eta} \end{aligned}$$

donde el último paso se justifica como sigue:

$$\begin{aligned}
 \eta e^{M\eta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \eta \frac{M^k}{k!} \eta \\
 &= 1 + \eta M \eta + \frac{\eta M^2 \eta}{2!} + \frac{\eta M^3 \eta}{3!} + \dots \\
 \eta \eta = \mathbb{1} \rightarrow &= 1 + \eta M \eta + \frac{\eta M \eta \eta M \eta}{2!} + \frac{\eta M \eta \eta M \eta \eta M \eta}{3!} + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta M \eta)^k}{k!} \\
 &= e^{\eta M \eta}
 \end{aligned}$$

De $e^{\lambda^T} = e^{-\eta \lambda \eta}$ se sigue que

$$\lambda^T = -\eta \lambda \eta \quad \stackrel{?}{\iff} \quad \lambda^T = \eta \lambda$$

Problema 7

Si $\Lambda \in \mathcal{L}$ entonces $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda^T \eta \Lambda) &= \det(\eta) \\
 \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda) &= \det(\eta) \\
 \det(\Lambda^T) = \det(\Lambda) \rightarrow (\det(\Lambda))^2 &= 1
 \end{aligned}$$

y entonces se obtiene lo que ya se sabía,

$$\Lambda \in \mathcal{L} \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

Debido a que el determinante es una función continua en los parámetros (o algo así) esto lo que hace es dividir al grupo de Lorentz en dos hojas según el determinante que son

$$\mathcal{L} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_+ & \text{cuando } \det \Lambda = 1 \\ \mathcal{L}_- & \text{cuando } \det \Lambda = -1 \end{cases} \rightarrow \text{No es un grupo pues } \mathbb{1} \notin \mathcal{L}_-$$

Se puede imponer otra subdivisión al grupo de Lorentz en función del signo de Λ^0_0 . A partir de la condición que debe satisfacer $\Lambda \in \mathcal{L}$, i.e. $\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}$, se encuentra que la componente $\mu = \nu = 0$ es

$$\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_0 \Lambda^\sigma_0 = \eta_{00} \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_k \underbrace{(\Lambda^0_k)^2}_{\geq 0} \geq 1$$

por lo tanto las componentes Λ^0_0 están “divididas” en dos conjuntos disjuntos:

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{o} \quad \Lambda^0_0 \leq -1$$

En función del signo de Λ^0_0 se imparte otra subdivisión de \mathcal{L} que se denota según

$$\mathcal{L} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^\uparrow & \text{cuando } \Lambda^0_0 \geq 1 \\ \mathcal{L}^\downarrow & \text{cuando } \Lambda^0_0 \leq -1 \end{cases} \rightarrow \text{No es un grupo pues } \mathbb{1} \notin \mathcal{L}^\downarrow$$

Entonces tenemos lo del siguiente box:

Box 8 - Subdivisiones del grupo de Lorentz

Sobre esto hay buena data en [1, p. 133]. El grupo de Lorentz \mathcal{L} se subdivide en cuatro subconjuntos (no todos son grupos) según el determinante de Λ y el signo de Λ^0_0

$$\mathcal{L}_{\det(\Lambda)}^{\text{sign}(\Lambda^0_0)} \rightarrow \text{define 4 sub-clasificaciones para las } \Lambda$$

que son

$$\mathcal{L} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_+^\uparrow & \rightarrow \text{Es el \u00fanico subgrupo pues } \mathbb{1} \in \mathcal{L}_+^\uparrow \\ \mathcal{L}_+^\downarrow & \rightarrow \text{Reflexiones espacio-temporales} \\ \mathcal{L}_-^\uparrow & \rightarrow \text{Reflexiones espaciales} \\ \mathcal{L}_-^\downarrow & \rightarrow \text{Reflexiones temporales} \end{cases}$$

Todos estos subconjuntos son disjuntos y la uni\u00f3n de todos ellos forma \mathcal{L} .
Obs\u00e9rvese que existen las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \mathcal{L}_-^\uparrow = P \cdot \mathcal{L}_+^\uparrow \\ \mathcal{L}_-^\downarrow = T \cdot \mathcal{L}_+^\uparrow \\ \mathcal{L}_+^\downarrow = P \cdot T \cdot \mathcal{L}_+^\uparrow \end{cases}$$

siendo $P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$, $T = -P$, $P \cdot T = -\mathbb{1}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_+^\uparrow \cup P\mathcal{L}_+^\uparrow \cup T\mathcal{L}_+^\uparrow \cup PT\mathcal{L}_+^\uparrow \\ &= (\mathbb{1} \cup P \cup T \cup PT) \mathcal{L}_+^\uparrow \end{aligned}$$

Debido a que $\mathbb{1} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ entonces

$$\Lambda \text{ est\u00e1 continuamente conectada con } \mathbb{1} \iff \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Box 9 - La matriz inversa y la notaci\u00f3n de \u00edndices

Sea $\Lambda \in \mathcal{L}$. Entonces (por definici\u00f3n de $\Lambda \in \mathcal{L}$) se satisface $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu$. Sabemos que $\eta^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta^\mu_\nu &= \eta^{\mu\xi} \underbrace{\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\xi \Lambda^\sigma_\nu}_{\eta_{\xi\nu}} \\ &= \Lambda_\sigma^\mu \Lambda^\sigma_\nu \end{aligned}$$

Por otro lado tambi\u00e9n sabemos que $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{1}$ por lo que $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu \Lambda^\nu_\rho = \delta^\mu_\rho$. Igualando esto con lo anterior

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma^\mu \Lambda^\sigma_\nu &= (\Lambda^{-1})^\mu_\sigma \Lambda^\sigma_\nu \\ \Lambda_\sigma^\mu \Lambda^\sigma_\nu - (\Lambda^{-1})^\mu_\sigma \Lambda^\sigma_\nu &= 0 \\ [\Lambda_\sigma^\mu - (\Lambda^{-1})^\mu_\sigma] \Lambda^\sigma_\nu &= 0 \end{aligned}$$

Para que lo anterior se anule para cualquier elecci\u00f3n de Λ pido que el corchete sea cero con lo cual se concluye que

$$\Lambda \in \mathcal{L} \Rightarrow \Lambda_\sigma^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\sigma$$

Problema 11

\u00cdtem a

Punto de vista de transformaci\u00f3n activa Si $\phi(x)$ es soluci\u00f3n de Klein-Gordon entonces queremos encontrar

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(\Lambda x + a) = ?$$

Para encontrar la respuesta primero hago la cuenta $\partial_\mu \phi(\Lambda x + a)$ por separado:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi(\Lambda x + a) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(\Lambda^\sigma{}_\nu x^\nu + a^\sigma) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Lambda^\sigma{}_\nu x^\nu + a^\sigma) \\ &= \partial_\sigma \phi \Lambda^\sigma{}_\nu \delta_{\mu\nu} \\ &= \partial_\sigma \phi \Lambda^\sigma{}_\mu \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \partial^\mu \phi &= \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \\ &= \eta^{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \Lambda^\sigma{}_\mu \\ &= \Lambda^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \\ a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu &\rightarrow = \Lambda_\sigma{}^\mu \partial^\sigma \phi \end{aligned}$$

Introduciendo esto en la ecuación de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(\Lambda x + a) &= (\Lambda_\sigma{}^\mu \Lambda^\rho{}_\mu \partial^\sigma \partial_\rho + m^2) \phi(x) \\ \Lambda_\sigma{}^\mu \Lambda^\rho{}_\mu = \Lambda^{-1} \Lambda = \mathbb{1} &\rightarrow = (\delta_{\sigma\rho} \partial^\sigma \partial_\rho + m^2) \phi(x) \\ &= \underbrace{(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)}_{=0} \phi(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto se verifica que $\phi \circ (\Lambda x + a)$ también satisface la ecuación de Klein-Gordon.

Punto de vista de interpretación pasiva Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} dos frames inerciales. Si las coordenadas de uno se relacionan con las del otro mediante una transformación de Poincaré

$$\text{Transformación de Poincaré } \rightarrow y = \Lambda x + a \quad \Leftrightarrow \quad x = \Lambda^{-1}(y - a)$$

entonces la transformación más general para el campo viene dada por [1, eq. (6.2.2)]

$$\phi_y(y) = F(\phi_x(x))$$

donde F es “alguna función”. Según la consigna F es la identidad con lo cual la relación se reduce a

$$\phi_y(y) = \phi_x(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi_x(x) = \phi_y(\Lambda x + a) \\ \phi_y(y) = \phi_x(\Lambda^{-1}(y - a)) \end{cases}$$

Para que la teoría sea invariante relativista ambos campos deben satisfacer la misma ecuación, i.e.

$$\text{Invariancia Poincaré } \rightarrow \begin{cases} (\square^2 + m^2)_x \phi_x = 0 & \rightarrow \text{Ecuación en } x \\ (\square^2 + m^2)_y \phi_y = 0 & \rightarrow \text{Ecuación en } y \end{cases}$$

Nótese que \square^2 es distinto en cada ecuación. Explícitamente se tiene que

$$\begin{cases} (\square^2 + m^2)_x \equiv \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m^2 = \partial^\mu \partial_\mu + m^2 \\ (\square^2 + m^2)_y \equiv \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m^2 = \partial^\mu \partial_\mu + m^2 \end{cases}$$

Como se puede ver la notación $\partial^\mu \partial_\mu$ es ambigua ya que no se sabe bien en qué frame está. Voy a inventar una notación que no sea ambigua con la esperanza de que me quede mejor:

$$\text{Mejoro la notación } \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x^\mu = \partial_\mu \text{ en notación tradicional} \\ \frac{\partial}{\partial y^\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_y^\mu = \partial'_\mu \text{ en notación tradicional} \end{cases}$$

Entonces la ecuación de Klein-Gordon en cada frame es

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^\mu}{x} \frac{\partial_\mu}{x} + m^2 \right) \phi_x(x) = 0 & \rightarrow \text{KG en } x \\ \left(\frac{\partial^\mu}{y} \frac{\partial_\mu}{y} + m^2 \right) \phi_y(y) = 0 & \rightarrow \text{KG en } y \end{cases}$$

Ahora sí, partiendo de la ecuación en x se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^\mu}{x} \frac{\partial_\mu}{x} + m^2 \right) \phi_x(x) &= 0 \\ \left(\Lambda_\nu^\mu \Lambda^\sigma_\mu \frac{\partial^\nu}{y} \frac{\partial_\sigma}{y} + m^2 \right) \phi_y(y) &= \leftarrow \begin{cases} \phi_x(x) = \phi_y(y) \\ \frac{\partial_\mu}{x} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial_\nu}{y} \\ \frac{\partial^\mu}{x} = \Lambda_\nu^\mu \frac{\partial^\nu}{y} \end{cases} \\ \left(\frac{\partial^\mu}{y} \frac{\partial_\mu}{y} + m^2 \right) \phi_y(y) &= \leftarrow \Lambda_\sigma^\mu \Lambda^\rho_\mu = \Lambda^{-1} \Lambda = \mathbb{1} \end{aligned}$$

que es la ecuación en y .

Problema 12

Ítem a

La divergencia de la corriente es

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu \eta^{\mu\nu} j_\nu \\ &= -\frac{i}{2} \partial^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) \\ &= -\frac{i}{2} (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi - \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* - \phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^*) \\ &= -\frac{i}{2} (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* + \phi^* \square^2 \phi - \phi \square^2 \phi^*) \\ a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu \rightarrow &= -\frac{i}{2} (\phi^* \square^2 \phi - \phi \square^2 \phi^*) \end{aligned}$$

Ahora para ver que esto es nulo considérese la ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

$$\text{Klein-Gordon complejo} \rightarrow \begin{cases} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^* = 0 \end{cases}$$

Si se las multiplica por el conjugado a cada una y se las resta se obtiene

$$\begin{aligned} \phi^* (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi - \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^* &= 0 \\ \phi^* \square^2 \phi + \cancel{\phi^* m^2 \phi} - \phi \square^2 \phi^* - \cancel{\phi m^2 \phi^*} &= \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que

$$\partial_\mu j^\mu \approx 0$$

Box 10 - Sobre el símbolo \approx

El símbolo \approx significa *on shell* y significa que la igualdad se cumple cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento.

Ítem b

Si el campo viene dado por

$$\phi_\pm(x) = e^{\mp i k^\mu x_\mu}$$

entonces la corriente es

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{i}{2} \left(e^{\pm i k^\mu x_\mu} [\mp i k^\mu e^{\mp i k^\mu x_\mu}] - e^{\mp i k^\mu x_\mu} [\pm i k^\mu e^{\pm i k^\mu x_\mu}] \right) \\ &= \frac{1}{2} k^\mu (\mp 1 \mp 1) \\ &= \mp k^\mu \end{aligned}$$

Ítem c

Debido a que $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ entonces $k_0 > 0$. En consecuencia $j_0 = k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ es negativo para la solución de frecuencia negativa.

Problema 13

Ítem a

La matriz $S \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ satisface $S\gamma^\mu S^{-1} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$. Esto surge de pedir invariancia relativista para la ecuación de Dirac. Considérense dos frames \mathbf{x} e \mathbf{y} relacionados por la transformación de Poincaré

$$y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

tales que en cada frame la función “de onda” es $\begin{cases} \psi_{\mathbf{x}}(x) \\ \psi_{\mathbf{y}}(y) \end{cases}$ en cada frame y la ecuación de Dirac es

$$\begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_{\mathbf{x}}(x) = 0 & \rightarrow \text{Dirac en } \mathbf{x} \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_{\mathbf{y}}(y) = 0 & \rightarrow \text{Dirac en } \mathbf{y} \end{cases}$$

(para ∂_μ estoy usando la misma notación que usé en el problema 11, i.e. $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \\ \frac{\partial}{\partial y^\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \end{cases}$). Estas funciones de onda se relacionan mediante [1, eq. (6.2.2)]

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{y}}(y) &= F(\psi_{\mathbf{x}}(x)) \\ F \text{ debe ser lineal } \rightarrow &= S\psi_{\mathbf{x}}(x) \end{aligned}$$

donde F es cualquier función y como la ecuación de Dirac es lineal entonces también lo debe ser F (no termino de ver por qué pero así lo plantea el libro). Tomando la ecuación en \mathbf{y} y reemplazando $\psi_{\mathbf{y}} = S\psi_{\mathbf{x}}$ y $\partial_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$, entonces

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_{\mathbf{y}}(y) &= 0 \leftarrow \text{Dirac en } \mathbf{y} \\ (i\gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m) S\psi_{\mathbf{x}}(x) &= \\ (i\gamma^\mu S \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - mS) \psi_{\mathbf{x}}(x) &= \leftarrow \text{Distribuyo } S \\ (iS^{-1} \gamma^\mu S \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - mS^{-1} S) \psi_{\mathbf{x}}(x) &= \leftarrow \text{Multiplico por } S^{-1} \text{ y distribuyo} \end{aligned}$$

Sé además que $\psi_{\mathbf{x}}$ satisface la ecuación de Dirac, es decir que tengo

$$\begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_{\mathbf{x}}(x) = 0 & \rightarrow \text{Dirac en frame } \mathbf{x} \\ (iS^{-1} \gamma^\mu S \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m) \psi_{\mathbf{x}}(x) = 0 & \rightarrow \text{Dirac en frame } \mathbf{y} \text{ transformada a } \mathbf{x} \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene

$$(\gamma^\mu - S^{-1} \gamma^\nu S \Lambda_\nu{}^\mu) \partial_\mu \psi_{\mathbf{x}}(x) = 0$$

Si $\psi_{\mathbf{x}}$ no es la solución trivial entonces el paréntesis debe anularse con lo cual

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= S^{-1} \gamma^\nu S \Lambda_\nu{}^\mu \\ \Lambda^\rho{}_\mu \gamma^\mu &= S^{-1} \gamma^\nu S \overbrace{\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda_\nu{}^\mu}^{\delta_{\rho\nu}} \end{aligned}$$

por lo tanto finalmente

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1} \gamma^\mu S$$

Ítem b

A primer orden se tiene que

$$S = e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

A primer orden en $\omega \rightarrow \approx \mathbf{1} + \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \rightarrow = \mathbf{1} - \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\omega^{\mu\nu}$$

y [1, eq. (6.2.8a)]

$$\Lambda^\mu{}_\nu \stackrel{?}{=} \left(e^{\frac{1}{2}\Sigma_{\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma}} \right)^\mu{}_\nu$$

A primer orden en $\omega \rightarrow \checkmark \approx \eta^\mu{}_\nu + \omega^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}$

con ω los parámetros infinitesimales que satisfacen [1, eq. (6.2.8b)]

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$$

lo cual hace que sólo puedan existir seis distintos.

Ahora introduzco esto en $\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = S^{-1}\gamma^\mu S$ y entonces

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \left(\mathbf{1} + \frac{\omega^{\rho\sigma}}{8}[\gamma_\rho, \gamma_\sigma] \right) \gamma^\mu \left(\mathbf{1} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{8}[\gamma_\lambda, \gamma_\xi] \right)$$

$$(\eta^\mu{}_\nu + \omega^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu})\gamma^\nu \approx \gamma^\mu + \frac{\omega^{\rho\sigma}}{8}[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\gamma^\mu - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{8}\gamma^\mu[\gamma_\lambda, \gamma_\xi] + \mathcal{O}(\omega^2)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \rightarrow = \gamma^\mu + \frac{\omega^{\rho\sigma}}{8}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho)\gamma^\mu - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{8}\gamma^\mu(\gamma_\lambda\gamma_\xi - \gamma_\xi\gamma_\lambda)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \rightarrow = \underbrace{\gamma^\mu + \frac{\omega^{\rho\sigma}}{4}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \eta_{\sigma\rho}\mathbf{1})\gamma^\mu}_{\text{ASD}} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}\gamma^\mu(\gamma_\lambda\gamma_\xi - \eta_{\xi\lambda}\mathbf{1})$$

$$\gamma^\mu = \eta^{\mu\zeta}\gamma_\zeta \rightarrow = \text{ASD} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}\eta^{\mu\zeta}\gamma_\zeta(\gamma_\lambda\gamma_\xi - \eta_{\xi\lambda}\mathbf{1})$$

$$\gamma_\zeta\gamma_\lambda = 2\eta_{\zeta\lambda}\mathbf{1} - \gamma_\lambda\gamma_\zeta \rightarrow = \text{ASD} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}\eta^{\mu\zeta}((2\eta_{\lambda\zeta}\mathbf{1} - \gamma_\lambda\gamma_\zeta)\gamma_\xi - \eta_{\xi\lambda}\gamma_\zeta)$$

$$\gamma_\zeta\gamma_\xi = 2\eta_{\zeta\xi}\mathbf{1} - \gamma_\xi\gamma_\zeta \rightarrow = \text{ASD} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}\eta^{\mu\zeta}(2\eta_{\lambda\zeta}\gamma_\xi - \gamma_\lambda(2\eta_{\zeta\xi}\mathbf{1} - \gamma_\xi\gamma_\zeta) - \eta_{\xi\lambda}\gamma_\zeta)$$

$$= \text{ASD} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}\eta^{\mu\zeta}(2\eta_{\lambda\zeta}\gamma_\xi - 2\eta_{\zeta\xi}\gamma_\lambda + \gamma_\lambda\gamma_\xi\gamma_\zeta - \eta_{\xi\lambda}\gamma_\zeta)$$

$$= \text{ASD} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}(2\eta^{\mu\zeta}\eta_{\lambda\zeta}\gamma_\xi - 2\eta^{\mu\zeta}\eta_{\zeta\xi}\gamma_\lambda + \gamma_\lambda\gamma_\xi\eta^{\mu\zeta}\gamma_\zeta - \eta_{\xi\lambda}\eta^{\mu\zeta}\gamma_\zeta)$$

$$= \text{ASD} - \frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}(2\delta^\mu{}_\lambda\gamma_\xi - 2\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda + \gamma_\lambda\gamma_\xi\gamma^\mu - \eta_{\xi\lambda}\gamma^\mu)$$

$$= \text{ASD} + \frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}(\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda - \delta^\mu{}_\lambda\gamma_\xi) - \underbrace{\frac{\omega^{\lambda\xi}}{4}(\gamma_\lambda\gamma_\xi - \eta_{\xi\lambda}\mathbf{1})\gamma^\mu}_{\text{ASD} - \gamma^\mu}$$

$$= \gamma^\mu + \frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}(\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda - \delta^\mu{}_\lambda\gamma_\xi)$$

Corto y sigo aparte:

$$\begin{aligned}
 (\cancel{\eta}^\mu{}_\nu + \omega^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu})\gamma^\nu &= \cancel{\gamma}^\mu + \frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}(\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda - \delta^\mu{}_\lambda\gamma_\xi) \\
 \omega^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}\gamma^\nu &= \left(\frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda\right) - \left(\frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}\delta^\mu{}_\lambda\gamma_\xi\right) \\
 &= \left(\frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda\right) - \left(\frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}\delta^\mu{}_\lambda\gamma_\xi\right) \\
 \omega^{\lambda\xi} \stackrel{\text{def}}{=} -\omega^{\xi\lambda} \rightarrow &= \left(\frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda\right) + \left(\frac{\omega^{\xi\lambda}}{2}\delta^\mu{}_\lambda\gamma_\xi\right) \\
 \text{Exceptuando } \mu \text{ son todos } \text{índices mudos} \rightarrow &= \left(\frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda\right) + \left(\frac{\omega^{\lambda\xi}}{2}\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda\right) \\
 &= \omega^{\lambda\xi}\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda
 \end{aligned}$$

Continuando aparte esto sigue así:

$$\begin{aligned}
 \omega^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}\gamma^\nu &= \omega^{\lambda\xi}\delta^\mu{}_\xi\gamma_\lambda \\
 \omega^{\mu\rho}\gamma_\rho &= \omega^{\lambda\mu}\gamma_\lambda
 \end{aligned}$$

Bajón, me comí algún signo negativo pues me quedó $1 = -1$ (usando que $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$).

Box 11 - Generadores del grupo de Lorentz

Debido a que \mathcal{L}_+^\uparrow es un grupo de Lie, entonces $\forall \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ (ver box 6 y box 8) vale que [2, eq. (1.149)]

$$\Lambda = \begin{cases} e^{\xi_i K_i + \theta_i J_i} \\ e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \\ e^{\omega^\mu{}_\nu} \end{cases} \leftarrow \text{Tres notaciones distintas para lo mismo}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Generadores} \rightarrow \\ \text{Parámetros} \rightarrow \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Boosts} \\ \rightarrow \text{Rotaciones} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i \in \mathbb{R} \text{ parametrizan los boosts} \\ \theta_i \in \mathbb{R} \text{ parametrizan las rotaciones} \end{array} \right.$$

y

Generadores →

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma^{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ (\Sigma^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = -(\Sigma^{\nu\mu})^\rho{}_\sigma \end{array} \right.$$

Parámetros →

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{0i} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_i \text{ (parametrizan boosts)} \\ \omega_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_k \text{ (} i, j, k \text{ cíclicos) (parametrizan rotaciones)} \\ \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \in \mathbb{R} \\ \omega^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\Sigma^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma^{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\Sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \end{array} \right.$$

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ -\xi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\xi_3 & -\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\theta_3 & -\theta_2 \\ \xi_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \xi_3 & \theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Problema 14

Box 12 - Matriz de transformación de espinores

La matriz $S(\Lambda)$ que transforma a un espinor frente a una transformación de Lorentz dada por Λ es

$$S = \begin{cases} e^{i(\xi_i K_i + \theta_i J_i)} \\ e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}} \end{cases} \rightarrow \text{Dos notaciones distintas para lo mismo}$$

donde $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ (o sea, los $\Sigma^{\mu\nu}$ de acá son distintos a los que generan las Λ) y $\omega_{\mu\nu}$ son los mismos que en el box 11 (siempre y cuando se hayan elegido convenientemente las Σ de acá).

Duda: Si elijo la representación de Dirac o la quiral para las γ^μ entonces me cambian las $\Sigma^{\mu\nu}$ y esto hace que me cambien las S . Está bien esto? El cambio en S “contrarresta” el cambio en ψ ?

Box 13 - Sobre las álgebras; los grupos y las representaciones

$$(\text{grupo}) = e^{(\text{álgebra})}$$

Si se tienen distintos objetos que satisfacen la misma álgebra, entonces éstos generarán el mismo grupo pero en distintas representaciones. Por ejemplo, recordando que

$$\left\{ \begin{array}{l} (M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \equiv \eta^{\alpha\mu} \delta^\beta{}_\nu - \eta^{\beta\mu} \delta^\alpha{}_\nu \quad \checkmark \rightarrow \text{Generadores de las } \Lambda \\ \Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \rightarrow \text{Generadores de las } S(\Lambda) \end{array} \right.$$

tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = e^{\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (\eta^{\alpha\mu} \delta^\beta{}_\nu - \eta^{\beta\mu} \delta^\alpha{}_\nu)} \rightarrow \text{Una representación del grupo de Lorentz} \\ S = e^{\frac{i}{8} \omega_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]} \rightarrow \text{Otra representación del grupo de Lorentz} \end{array} \right.$$

por el hecho de que $\eta^{\alpha\mu} \delta^\beta{}_\nu - \eta^{\beta\mu} \delta^\alpha{}_\nu$ y $\frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ satisfacen el álgebra de Lorentz, que está definida por [3, sec. 10.1]

$$\text{Lorentz algebra } \mathbf{SO}(1,3) \rightarrow \begin{cases} [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \end{cases}$$

Ítem a

Si $\psi = \begin{bmatrix} \xi \\ \chi \end{bmatrix}$ es un espinor entonces éste se transforma según

$$\psi' = S(\Lambda) \psi$$

con $S = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$ donde $\Sigma_{\mu\nu} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ son los generadores del grupo de Lorentz. Las matrices $\Sigma_{\mu\nu}$ son, como se vio en el problema 13, $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Si la transformación $\psi' = S(\Lambda) \psi$ preserva espinores de la forma $\begin{bmatrix} \xi \\ \chi \end{bmatrix}$ entonces necesariamente

S es una matriz en bloques $S = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$ donde las x representan elementos (no todos iguales, es sólo estético lo anterior).

Para verificar esto se considera

$$\begin{aligned} S &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu})^k}{2^k k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} (\omega_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu])^k}{8^k k!} \end{aligned}$$

Si se usa la representación quiral entonces la forma de las matrices $\Sigma^{\mu\nu}$ viene dada por

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &\sim \begin{bmatrix} & a \\ b & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & c \\ d & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & c \\ d & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & a \\ b & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad & \\ & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} cb & \\ & da \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La notación $\omega_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ no es más que una suma doble ya que $\omega_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ por lo tanto

$$\omega_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \sim \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$$

Entonces

$$S \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^k}{8^k k!}$$

Obsérvese ahora que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^0 &= \mathbb{1} \\ \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^1 &= \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} A^2 & \\ & B^2 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} A^k & \\ & B^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$S \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{8^k k!} \begin{bmatrix} A^k & \\ & B^k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{\text{algo1}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{algo2}} \end{bmatrix}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\psi' &= S\psi \\ &\sim \begin{bmatrix} \boxed{\text{algo1}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{algo2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \chi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{\text{algo1}} \xi \\ \boxed{\text{algo2}} \chi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

con lo cual ξ y χ no se mezclan.

Guía 2 - Formulación lagrangiana

Problema 1 (guía vieja!)

Ítem a

El tensor de energía-momento surge de considerar una traslación δx^μ y aplicar el teorema de Noether [4, sect. 1.3.2]. Éste viene dado por

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu \rightarrow \text{Tensor de energía-momento}$$

En particular para el lagrangiano de la consigna el primer término es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \\ a^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \phi \rightarrow &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a^\mu} (\eta_{\nu\sigma} a^\sigma a^\nu) \\ &= \eta_{\nu\sigma} \frac{\partial a^\sigma}{\partial a^\mu} \frac{a^\nu}{2} + \eta_{\nu\sigma} \frac{a^\sigma}{2} \frac{\partial a^\nu}{\partial a^\mu} \\ &= \eta_{\nu\sigma} \delta_{\sigma\mu} \frac{a^\nu}{2} + \eta_{\nu\sigma} \frac{a^\sigma}{2} \delta_{\mu\nu} \\ &= \frac{a_\mu}{2} + \frac{a_\mu}{2} \\ &= \partial^\mu \phi \end{aligned}$$

Entonces

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - m^2 \phi^2) \delta^\mu{}_\nu$$

Ítem b

La energía y el momento vienen dados por [4, eq. (1.43)]

$$\begin{cases} E = \int d^3x T^{00} \\ P^i = \int d^3x T^{0i} \end{cases}$$

Entonces la densidad de 4-momentum es

$$\begin{aligned} p^\mu &= T^{0\mu} \\ &= \left[\partial^0 \phi \partial_\rho \phi - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - m^2 \phi) \delta^0{}_\rho \right] \eta^{\rho\mu} \\ &= \partial^0 \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - m^2 \phi) \eta^{0\mu} \end{aligned}$$

La energía es

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left[\eta^{0\sigma} \partial_\sigma \phi \eta^{0\zeta} \partial_\zeta \phi - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - m^2 \phi) \eta^{00} \right] \\ &= \int d^3x \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi}{2} - \frac{m^2 \phi}{2} \right] \\ &= \int d^3x \left[\dot{\phi}^2 - \frac{(\nabla \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi \right] \end{aligned}$$

En cuanto a las componentes del momento éstas son

$$\begin{aligned} p^i &= \int d^4x \left[\partial^0 \phi \partial^i \phi - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - m^2 \phi) \eta^{0i} \right] \\ &= \int d^4x \left[\dot{\phi} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) + \frac{\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi}{2} \right] \end{aligned}$$

Ítem c

Si ϕ es solución de la ecuación de Klein-Gordon entonces

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [a_k e^{-ikx} + b_k e^{ikx}] \rightarrow \text{Solución general de KG}$$

Para este ϕ se tiene que

$$\partial_\mu \phi = i \int d^3k k_\mu (b_k e^{ikx} - a_k e^{-ikx})$$

Como k es un *time-like 4 vector* entonces $\partial_\mu \phi$ también lo es (bueno, $\partial^\mu \phi$ lo es) y entonces . por lo que

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = i^2 \int d^3k \int d^3\kappa k_\mu \kappa^\mu (b_k e^{ikx} - a_k e^{-ikx}) (b_\kappa e^{i\kappa x} - a_\kappa e^{-i\kappa x})$$

Introduciendo esto en la expresión para la energía se obtiene:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left[\dot{\phi}^2 - \frac{\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \right] \leftarrow \text{Expresión del ítem previo} \\ &= \int dx \left[\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\) \right] \end{aligned}$$

Problema 1

Ítem a

La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Primero calculo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \\ a^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \phi \rightarrow &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a^\mu} (\eta_{\nu\sigma} a^\sigma a^\nu) \\ &= \eta_{\nu\sigma} \frac{\partial a^\sigma}{\partial a^\mu} \frac{a^\nu}{2} + \eta_{\nu\sigma} \frac{a^\sigma}{2} \frac{\partial a^\nu}{\partial a^\mu} \\ &= \eta_{\nu\sigma} \delta_{\sigma\mu} \frac{a^\nu}{2} + \eta_{\nu\sigma} \frac{a^\sigma}{2} \delta_{\mu\nu} \\ &= \frac{a_\mu}{2} + \frac{a_\mu}{2} \\ &= \partial^\mu \phi \end{aligned}$$

Ahora sí la ecuación de Euler-Lagrange es

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \rightarrow \text{Ecuación de Klein-Gordon}$$

Ítem b

Ahora habrá dos ecuaciones de Euler-Lagrange que son

$$\begin{cases} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_1)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} = 0 \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_2)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_2} = 0 \end{cases}$$

Antes de comenzar con la cuenta voy a reemplazar $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ en el lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 [\phi_1^2 + \phi_2^2] \\ &= \mathcal{L}_1(\phi_1, \partial_\mu \phi_1) + \mathcal{L}_2(\phi_2, \partial_\mu \phi_2) \end{aligned}$$

Como se puede ver no aparece ningún término cruzado con lo cual no hay ninguna interacción de ningún tipo entre ϕ_1 y ϕ_2 y además los lagrangianos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son iguales al del ítem previo con lo cual las ecuaciones resultantes serán las mismas.

Problema 2

Ítem a (hay una duda mágica)

Una traslación espacio-temporal es una transformación de coordenadas de la forma

$$y^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \rightarrow \text{Traslación}$$

con ε^μ las componentes de algún cuadrivector (infinitesimal). En particular existirán cuatro traslaciones independientes, cada una en una dirección del espacio distinta:

$$\begin{cases} (y_0)^\mu = x^\mu + \varepsilon_0 \delta^\mu_0 & \rightarrow \text{Traslación en } t \\ (y_1)^\mu = x^\mu + \varepsilon_1 \delta^\mu_1 & \rightarrow \text{Traslación en } x \\ (y_2)^\mu = x^\mu + \varepsilon_2 \delta^\mu_2 & \rightarrow \text{Traslación en } y \\ (y_3)^\mu = x^\mu + \varepsilon_3 \delta^\mu_3 & \rightarrow \text{Traslación en } z \end{cases} \Rightarrow (y_a)^\mu = x^\mu + \varepsilon_a \delta^\mu_a$$

donde el subíndice a indica de cuál de estas transformaciones hablamos y superíndice μ barre las componentes. Obsérvese que ε_a son cuatro parámetros infinitesimales completamente independientes uno de otro. Con esto me refiero a que $\underline{\varepsilon_a \eta^{a\mu}}$ no es un cuadrivector, sino una simple colección de parámetros infinitesimales.

Frente a una transformación $(y_a)^\mu = x^\mu + \varepsilon_a \delta^\mu_a$ (para un a fijo) la modificación en el campo es

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi(y_a) \\ &= \phi(x + \varepsilon_a) \\ &\approx \phi(x) + \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \phi + \mathcal{O}((\varepsilon_a)^2) \end{aligned}$$

donde reconocemos $(\delta\phi)_a = \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \phi$.

Para encontrar cómo transforman las derivadas del campo, $\partial_\mu \phi$, se considera lo siguiente

$$\begin{aligned} \partial_x \phi' &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x + \varepsilon_a) \\ \text{Taylor} \rightarrow &\approx \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\phi(x) + \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \phi + \mathcal{O}((\varepsilon_a)^2) \right] \\ (\delta\phi)_a = \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \phi \rightarrow &= \partial_x \phi + \partial_x (\delta\phi)_a + \mathcal{O}((\varepsilon_a)^2) \end{aligned}$$

de donde se concluye que $(\delta(\partial_\mu \phi))_a = \partial_\mu (\delta\phi)_a$.

Entonces, en resumen, la transformación induce los siguientes cambios

$$\begin{cases} (\delta x^\mu)_a = \varepsilon_a \delta^\mu_a \\ (\delta\phi)_a = \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \phi \\ (\delta(\partial_\mu \phi))_a = \partial_\mu (\delta\phi)_a \end{cases} \quad \text{El índice } a \text{ no está contraído, está fijo en uno de } a \in \{0, 1, 2, 3\}$$

y lo mismo para ϕ^* .

Para cada transformación con $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ fijo existirá una corriente de Noether distinta, es decir

$$(J_a)^\mu \text{ es la corriente de Noether asociada a la traslación } (y_a)^\mu = x^\mu + \varepsilon_a \delta^\mu_a$$

En particular para $a = 0$ (traslación temporal) se debería obtener la conservación de la energía y para $a \in \{1, 2, 3\}$ la conservación del momento lineal en cada una de las direcciones espaciales.

Box 14 - Teorema de Noether

Sea un lagrangiano $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)$. Sea una transformación parametrizada por $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{Transformación activa} \rightarrow \begin{cases} x \rightarrow x' = f_x(\varepsilon) \\ \phi \rightarrow \phi' = f_\phi(\varepsilon) \end{cases}$$

con $f_i \rightarrow \mathbb{1}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Téngase en cuenta que f_x y f_ϕ no sólo dependen de ε , en el caso más típico $f_x = f_x(x, \varepsilon)$ y $f_\phi = f_\phi(\phi, x, \varepsilon)$.

Ejemplos Se pueden mencionar dos ejemplos que son

1. transformación activa del espaciotiempo $\begin{cases} x' = f_x(\varepsilon) \\ \phi'(x) = \phi(f_x(\varepsilon)) \end{cases}$ y
2. una modificación "manual" del campo $\begin{cases} x' = x \\ \phi'(x) = f_\phi(\varepsilon) \end{cases}$.

Siempre se debe tratar a estas transformaciones en forma activa (quizá es lo mismo).
Frente a una transformación de este tipo el lagrangiano cambiará según

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}(f_\phi(\varepsilon), \partial_\mu f_\phi(\varepsilon), f_x(\varepsilon)) \rightarrow \text{Transformación de } \mathcal{L}, \text{ no necesariamente infinitesimal}$$

El cambio en el lagrangiano se puede aproximar a primer orden en ε según

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial (\partial_\mu f_\phi)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \frac{\partial (f_x)^\mu}{\partial \varepsilon} \varepsilon \end{aligned}$$

Usando que a primer orden en ε la transformación en x y en ϕ viene dada por $\begin{cases} x' \approx x + \frac{\partial f_x}{\partial \varepsilon} \varepsilon \\ \phi' \approx \phi + \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon \end{cases}$ podemos identificar

las cantidades $\begin{cases} \delta x = \frac{\partial f_x}{\partial \varepsilon} \varepsilon \\ \delta \phi = \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon \end{cases}$ por lo tanto lo anterior se puede expresar según

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial (\partial_\mu f_\phi)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu$$

Para el término "del medio" se considera lo siguiente: usando que $\phi' \stackrel{\text{def}}{=} f_\phi(\varepsilon) \approx \phi + \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon$ entonces $\partial_\mu f_\phi(\phi, \varepsilon) \approx \partial_\mu \left(\phi + \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon \right)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\partial_\mu f_\phi)}{\partial \varepsilon} \varepsilon &= \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\phi + \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon \right) \right] \varepsilon \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial \varepsilon^2} \varepsilon + \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \right) \varepsilon \\ &= \partial_\mu \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \delta \phi = \frac{\partial f_\phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon \rightarrow &= \partial_\mu (\delta \phi) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) &= \text{regla de la cadena} \rightarrow = \mathcal{L} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi}_{\text{Euler-Lagrange para } \phi} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \\ \text{Eule-Lagrange} \equiv 0 \rightarrow &= \mathcal{L} + \underbrace{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right)}_{\delta \mathcal{L}} \\ &= \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} \end{aligned}$$

Por otro lado, las ecuaciones de Euler-Lagrange antes y después de aplicar la transformación son

$$\text{Euler-Lagrange} \rightarrow \begin{cases} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\mu \phi')} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi'} = 0 \end{cases} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \neq \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \partial'_\mu$$

donde $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \neq \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \partial'_\mu$. Explicité que la derivación es con respecto a la variable x y no a x' para que no quede ningún tipo de duda. El motivo de esto es que la transformación se realizó en forma activa, con lo cual lo que se transformó es el sistema pero el observador que calcula las ecuaciones de movimiento es el mismo, sus variables x son las mismas.

FALTA TERMINAR ESTO!

La corriente de Noether para la transformación a -ésima (con a fija) se obtiene a partir de (**Duda mágica no tengo la más remota idea de por qué $F^\mu = \delta x^\mu$ para este problema**)

$$\begin{aligned}
 a \text{ no se está contrayendo, está fijo! } \rightarrow \varepsilon_a (J_a)^\mu &= \left[\sum_{\forall \text{ campo } \phi_i} (\delta\phi_i)_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] - (\delta x^\mu)_a \mathcal{L} \\
 &= (\delta\phi)_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + (\partial\phi^*)_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} - (\delta x^\nu)_a \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \\
 \left. \begin{aligned} (\delta x^\mu)_a &= \varepsilon_a \delta^\mu_a \\ (\delta\phi)_a &= \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \phi \\ (\delta(\partial_\mu \phi))_a &= \partial_\mu (\delta\phi)_a \\ \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \varepsilon_a \delta^\sigma_a \partial_\sigma \phi \partial^\mu \phi^* + \varepsilon_a \delta^\rho_a \partial_\rho \phi^* \partial^\mu \phi - \varepsilon_a \delta^\nu_a \delta^\mu_\nu (\partial_\zeta \phi \partial^\zeta \phi^* - m^2 \phi \phi^*) \\
 &= \varepsilon_a \partial_a \phi \partial^\mu \phi^* + \varepsilon_a \partial_a \phi^* \partial^\mu \phi - \varepsilon_a \delta^\mu_a (\partial_\zeta \phi \partial^\zeta \phi^* - m^2 \phi \phi^*)
 \end{aligned}$$

Ahora se puede cancelar el ε_a a ambos lados de la igualdad y entonces se obtiene la corriente de Noether asociada a la transformación a -ésima que es

$$(J_a)^\mu = \partial_a \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_a \phi^* \partial^\mu \phi - \delta^\mu_a (\partial_\zeta \phi \partial^\zeta \phi^* - m^2 \phi \phi^*)$$

Box 15 - Transformación de simetría

Considérese un campo $\phi(x)$ tal que su ecuación de movimiento está dada por

$$f(\phi, x) = 0 \rightarrow \text{Eq. de movimiento para } \phi$$

Considérese además una transformación cualquiera^a

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) \rightarrow \text{Una transformación cualquiera}$$

Dicha transformación será de simetría si la ecuación de movimiento permanece invariante, es decir si la ecuación de movimiento antes y después de transformar es la misma:

$$\text{Eq. de movimiento} \rightarrow \begin{cases} f(\phi, x) = 0 & \rightarrow \text{Antes de transformar} \\ f(\phi', x) = 0 & \rightarrow \text{Después de transformar} \end{cases}$$

^aPuede ser cualquier cosa la transformación, por ejemplo $\begin{cases} \phi'(x) = \ln(\phi(x)) & \text{una transformación del campo} \\ \phi'(x) = \phi(\tanh(x)) & \text{una transformación de coordenadas} \\ \phi'(x) = \cos(\phi(\text{erf}(x))) & \text{una transformación de coordenadas y del campo} \end{cases}$.

Ítem b

Este problema se puede resolver de dos formas:

1. tomar la “definición” del tensor de momento energía [1, eq. (12.4.1)] y ponerse a hacer las cuentas tipo computadora algorítmica, o
2. se puede encarar utilizando el teorema de Noether y tratando de entender lo que está pasando.

Método algorítmico Utilizo el tensor de momento energía

$$\begin{aligned}
 T^\mu{}_\nu &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\forall \text{campos } \phi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i \right) - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \partial_\nu \phi^* - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu \\
 \mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* &\rightarrow = \partial^\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi^* - (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi^* - m^2 \phi \phi^*) \delta^\mu{}_\nu
 \end{aligned}$$

El cuadrivector (densidad de) momento es [1, eq. (12.4.8)]

$$\begin{aligned}
 \text{Densidad } \rightarrow p^\mu &= T^{0\mu} \\
 &= T^0{}_\nu \eta^{\nu\mu} \\
 &= \partial^0 \phi^* \partial^\mu \phi + \partial^0 \phi \partial^\mu \phi^* - (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi^* - m^2 \phi \phi^*) \delta^{0\mu}
 \end{aligned}$$

La energía es la componente temporal de este cuadrivector:

$$\begin{aligned}
 \text{Densidad } \rightarrow E &= p^0 \\
 &= \partial^0 \phi^* \partial^0 \phi + \partial^0 \phi \partial^0 \phi^* - (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi^* - m^2 \phi \phi^*) \\
 &= 2 \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - m^2 |\phi|^2 \right) \\
 &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* + m^2 \phi \phi^*
 \end{aligned}$$

y las componentes del momento lineal son

$$\begin{aligned}
 \text{Densidad } \rightarrow p^i &= T^{0i} \\
 &= \partial^0 \phi^* \partial^i \phi + \partial^0 \phi \partial^i \phi^* \\
 &= -\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^*}{\partial x^i}
 \end{aligned}$$

o bien, escrito como trivector,

$$\text{Densidad } \rightarrow \mathbf{p} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \nabla \phi - \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi^*$$

Método intentando entender lo que está pasando La ley de conservación de la energía está asociada a la traslación temporal y el conservación del momento lineal a la traslación espacial. En otras palabras, la conservación de la componente μ -ésima del cuadrivector momento p^μ viene dada por la simetría del sistema frente a una traslación en la dirección x^μ .

En el ítem (a) se encontró la expresión para la corriente de Noether $(J_a)^\mu$ asociada a una traslación espacial de la forma $(y_a)^\mu = x^\mu + \varepsilon_a \delta^\mu{}_a$, para un $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ fijo. De acuerdo con el teorema de Noether esta corriente satisface la ley de conservación $\partial_\mu (J_a)^\mu = 0$ por lo tanto se obtienen cuatro leyes de conservación

$$\text{Leyes de conservación } \rightarrow \begin{cases} \partial_\mu (J_{a=0})^\mu = 0 & \rightarrow \text{Conservación de } E \\ \partial_\mu (J_{a=1})^\mu = 0 & \rightarrow \text{Conservación de } p_x \\ \partial_\mu (J_{a=2})^\mu = 0 & \rightarrow \text{Conservación de } p_y \\ \partial_\mu (J_{a=3})^\mu = 0 & \rightarrow \text{Conservación de } p_z \end{cases}$$

para cada valor de a .

Para $a = 0$ la ley es la conservación de la energía y establece que

$$\frac{\partial (J_0)^0}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_0 \leftarrow \mathbf{J}_0 = (J_0)^1 \hat{x} + (J_0)^2 \hat{y} + (J_0)^3 \hat{z}$$

En este caso la cantidad conservada será $\int (J_0)^0 d^3x$, por lo tanto $(J_0)^0$ tiene que ser la densidad de energía. Usando la corriente de Noether del ítem (a) esto es

$$(J_0)^0 = \partial_0 \phi \partial^0 \phi^* + \partial_0 \phi^* \partial^0 \phi - \delta^0_0 (\partial_\zeta \phi \partial^\zeta \phi^* - m^2 \phi \phi^*)$$

y si se compara esto con la expresión algorítmica se ve que es lo mismo \checkmark .

Para la componente $a = i \in \{1, 2, 3\}$ la ley de conservación es

$$\frac{\partial (J_i)^0}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_i$$

por lo tanto aquí la cantidad conservada es (igual que antes, jaja) $\int (J_i)^0 d^3x$. En consecuencia $(J_i)^0$ es la densidad de momento lineal en la dirección i . Utilizando la corriente de Noether del ítem (a) esto es

$$\begin{aligned} (J_i)^0 &= \partial_i \phi \partial^0 \phi^* + \partial_i \phi^* \partial^0 \phi - \overset{0 \text{ pues } i \neq 0}{\delta^0_i} (\partial_\zeta \phi \partial^\zeta \phi^* - m^2 \phi \phi^*) \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned}$$

que, nuevamente, es lo mismo que se halló en con el método algorítmico.

Ítem c y d

La ecuación de Klein-Gordon para el campo complejo es

$$\begin{cases} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^* = 0 \end{cases}$$

la cual admite soluciones de onda plana de la forma

$$\text{Soluciones planas} \rightarrow \begin{cases} \phi(x) = a e^{-ik^\mu x_\mu} + b^* e^{ik^\mu x_\mu} \\ \phi^*(x) = a^* e^{ik^\mu x_\mu} + b e^{-ik^\mu x_\mu} \end{cases}$$

Existe una restricción sobre los valores de k^μ que se puede encontrar fácilmente colocando las soluciones en las ecuaciones: las cuentitas son

$$\begin{aligned} \partial^\mu \phi &= \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi \\ &= \eta^{\mu\nu} \left(a (-i) k_\nu e^{-ik^\zeta x_\zeta} + b^* i k_\nu e^{ik^\zeta x_\zeta} \right) \\ &= i k^\mu \left(-a e^{-ik^\zeta x_\zeta} + b^* e^{ik^\zeta x_\zeta} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \phi &= i k^\mu \left(-a (-i) k_\mu e^{-ik^\zeta x_\zeta} + b^* i k_\mu e^{ik^\zeta x_\zeta} \right) \\ &= -k^\mu k_\mu \left(a e^{ik^\zeta x_\zeta} + b^* e^{ik^\zeta x_\zeta} \right) \\ &= -k^\mu k_\mu \phi \end{aligned}$$

por lo que

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = \overbrace{(-k^\mu k_\mu + m^2)}{=0} \phi = 0$$

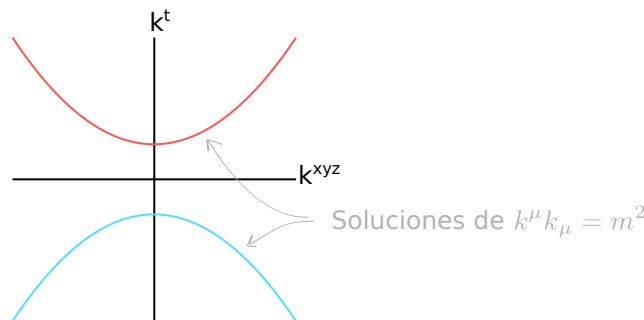
y entonces

$$k^\mu k_\mu = m^2 \rightarrow \text{Restricción}$$

Además imponemos la restricción

$$k^0 > 0 \rightarrow \text{Otra restricción}$$

que es una convención. Básicamente consiste seleccionar una de las dos ramas de soluciones de $k^\mu k_\mu = m^2$:



En particular la rama indicada en color rojo.

Debido a que las ecuaciones son lineales en ϕ se puede aplicar superposición (Fourier). En consecuencia una solución general será de la forma

$$\phi(x) = \int_{\{k^\mu k_\mu = m^2, k^0 > 0\}} \frac{dk}{(2\pi)^4} \left(a_k e^{-ik^\mu x_\mu} + b_k^* e^{ik^\mu x_\mu} \right) \rightarrow \text{Solución general de Klein-Gordon}$$

Obsérvese que el dominio de integración está definido por las dos restricciones impuestas. Lo anterior es “fuzzy notation” en el sentido de que dk es algo ambiguo (es un diferencial del tipo d^3k en la región de integración). Una forma correcta de escribir lo anterior es

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta_D(k^\mu k_\mu - m^2) \Theta_H(k^0) \left[a_k e^{-ik^\mu x_\mu} + b_k^* e^{ik^\mu x_\mu} \right]$$

Para proceder con la integral se puede tomar $k^\mu k_\mu = m^2$ y despejar una de las componentes como función de las demás. Es convención despejar la componente temporal

$$(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2 \quad \equiv \quad k^\mu k_\mu = m^2$$

donde $\mathbf{k} = k^1 \hat{x} + k^2 \hat{y} + k^3 \hat{z}$ es la componente espacial de k^μ . En consecuencia la integral previa se puede reescribir como

$$\phi(x) = \int_{k^{1,2,3} \in \mathbb{R}} \int_{k^0=0}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta_D\left((k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2\right) \Theta_H(k^0) \tilde{\phi}(k, x)$$

con $\tilde{\phi}(k, x) = a_k e^{-ik^\mu x_\mu} + b_k^* e^{ik^\mu x_\mu}$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi}} \delta_D(\xi - |\mathbf{k}|^2 - m^2) \Theta_H(\sqrt{\xi}) \tilde{\phi}(\xi, \mathbf{k}, x) \leftarrow \begin{cases} \xi \stackrel{\text{def}}{=} (k^0)^2 \\ dk^0 = \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi}} \end{cases} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{\Theta_H\left(\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} \tilde{\phi}\left((k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 - m^2, \mathbf{k}, x\right) \\ \omega_{\mathbf{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \equiv k^0 \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2}\omega_{\mathbf{k}}} \tilde{\phi}(k^0 = \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, x) \end{aligned}$$

donde $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$ y $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$. Entonces una solución general de la ecuación de Klein-Gordon se puede escribir en términos de los momentos espaciales como

$$\text{Solución general de Klein-Gordon} \rightarrow \begin{cases} \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\ \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \equiv k^0 \end{cases}$$

donde el factor 2π adicional y el $\sqrt{2} \rightarrow 2$ se han absorbido mediante una redefinición de los $a_{\mathbf{k}}$ y los $b_{\mathbf{k}}^*$.

Ahora sí la densidad de energía es, del ítem previo,

$$E = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* + m^2 \phi \phi^* \rightarrow \text{Densidad de energía}$$

La derivada temporal de ϕ escrito en términos de los momentos espaciales es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}} (-i\omega_{\mathbf{k}}) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^* i\omega_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\ &= \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \end{aligned}$$

y la conjugada

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi^*}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \overbrace{\left(a_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right)}^{\phi^*} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}}^* i \omega_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - b_{\mathbf{k}} i \omega_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\
 &= \frac{-i}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(-a_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^*
 \end{aligned}$$

En consecuencia el primer término de la densidad de energía, $\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 \geq 0$.

El gradiente de ϕ es

$$\begin{aligned}
 \nabla \phi &= \nabla \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}} i \mathbf{k} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - b_{\mathbf{k}}^* i \mathbf{k} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{i \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right)
 \end{aligned}$$

y el de su conjugado

$$\begin{aligned}
 \nabla \phi^* &= \nabla \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}}^* (-i) \mathbf{k} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}} i \mathbf{k} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-i \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - b_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\
 &= (\nabla \phi)^*
 \end{aligned}$$

por lo que $\nabla \phi \cdot \nabla \phi^* = \nabla \phi \cdot (\nabla \phi)^* = |\nabla \phi|^2 \geq 0$. Entonces la energía es

$$E = \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 + |\nabla \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 \geq 0$$

No sé si esto ya era trivial a partir de $E = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* + m^2 \phi \phi^*$ o si merecía las cuentas.

Problema 5

Ítem a

El lagrangiano de Dirac es

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

y la ecuación de Dirac se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange $\begin{cases} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \end{cases}$, entiendo que

las dos ecuaciones conducen a lo mismo. Cada término es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\bar{\psi} m$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = \partial_\mu \bar{\psi} i \gamma^\mu$$

por lo que la ecuación de Euler-Lagrange resulta ser

$$\begin{aligned} i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} &= 0 \\ \bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + m \right) &= \leftarrow \text{Ecuación de Dirac para } \bar{\psi} \end{aligned}$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} &= 0 \\ i \partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu + \psi^\dagger \gamma^0 m &= \leftarrow \bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^\dagger \gamma^0 \\ i \partial_0 \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=1} + i \partial_j \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^j + \psi^\dagger \gamma^0 m &= \leftarrow j \in \{1, 2, 3\} \\ i \partial_0 \psi^\dagger - i \partial_j \psi^\dagger \gamma^j \gamma^0 + \psi^\dagger \gamma^0 m &= \leftarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \text{ para } \mu \neq \nu \\ i \partial_0 \psi^\dagger \gamma^0 - i \partial_j \psi^\dagger \gamma^j + \psi^\dagger m &= \leftarrow (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \\ -i (\gamma^0)^\dagger \partial_0 \psi + i (\gamma^j)^\dagger \partial_j \psi + m \psi &= \leftarrow \text{Aplico } \dagger \text{ a todo} \\ -i \gamma^0 \partial_0 \psi - i \gamma^j \partial_j \psi + m \psi &= \leftarrow (\gamma^\mu)^\dagger = \begin{cases} -\gamma^\mu & \text{para } \mu \neq 0 \\ \gamma^\mu & \text{para } \mu = 0 \end{cases} \\ (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= \leftarrow \text{Ecuación de Dirac para } \psi \checkmark \end{aligned}$$

Resulta más fácil hacer la cuenta con $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\ (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= \leftarrow \text{Ecuación de Dirac para } \psi \end{aligned}$$

Ítem b (me faltan las soluciones generales de Dirac bien escritas)

La energía es la componente 00 del tensor de momento energía:

$$\begin{aligned} E &= T^{00} \leftarrow \text{Densidad de energía} \\ T^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\forall \text{campos } \phi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i \right) - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu &\rightarrow = \eta^{0\nu} \left(\sum_{\forall \text{campos } \phi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i \right) - \eta^{0\nu} \mathcal{L} \delta^0{}_\nu \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial^0 \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \partial^0 \bar{\psi} \right) - \mathcal{L} \\ \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &\rightarrow = \bar{\psi} i \gamma^0 \partial^0 \psi - \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ \partial^0 = \partial_0 &\rightarrow = -i \bar{\psi} (\gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 - m) \psi \end{aligned}$$

Por otro lado la ecuación de Dirac $(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$ admite como soluciones a ondas planas de la forma

$$\psi(x) = a e^{-i k^\mu x_\mu} + b^* e^{i k^\mu x_\mu}$$

$$\begin{aligned} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= 0 \\ -i \gamma^\mu i k_\mu a e^{-i k^\mu x_\mu} + i \gamma^\mu i k_\mu b^* e^{i k^\mu x_\mu} - m \psi &= \\ \gamma^\mu k_\mu a e^{-i k^\mu x_\mu} - \gamma^\mu k_\mu b^* e^{i k^\mu x_\mu} - m \psi &= \\ &= \end{aligned}$$

adsnkasn kdopan kdopa sndkaop ndkpoas ndokpasnpoa.

Guía 3 - Cuantización canónica de Klein-Gordon

Problema 1

Ítem a

La ecuación de Klein-Gordon para el operador de campo $\overline{\phi(x)}$ es

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \overline{\phi} = 0 \rightarrow \text{Klein-Gordon}$$

Para la solución de la consigna se tiene que su primera derivada es

$$\begin{aligned} \partial_\mu \overline{\phi(x)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_\mu \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} ik_\mu \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ik^\mu x_\mu} - \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \end{aligned}$$

y la segunda derivada

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \overline{\phi(x)} &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \overbrace{k_\mu k^\mu}^{m^2} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ &= -m^2 \overline{\phi(x)} \end{aligned}$$

por lo tanto efectivamente $\overline{\phi}$ satisface la ecuación de Klein-Gordon \checkmark .

Para verificar que $\overline{\phi(x)}$ es real¹ basta ver que es igual a su dagueado

$$\overline{\phi(x)}^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

por lo tanto efectivamente

$$\overline{\phi(x)}^\dagger = \overline{\phi(x)} \quad \Rightarrow \quad \overline{\phi(x)} \text{ es hermítico} \quad \Rightarrow \quad \text{sus autovalores} \in \mathbb{R}$$

Ítem b

Hay que calcular el conmutador $[\overline{\phi(\mathbf{x}, t)}, \overline{\Pi(\mathbf{y}, t)}]$ donde

$$\begin{aligned} \overline{\Pi(x)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \overline{\phi})} \\ \overline{\mathcal{L}} &= \partial^\mu \overline{\phi}^\dagger \partial_\mu \overline{\phi} - m^2 \overline{\phi}^\dagger \overline{\phi} \rightarrow = \partial^0 \overline{\phi}^\dagger \\ \overline{\phi}^\dagger &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \rightarrow = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ik^\mu x_\mu} - \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ik^\mu x_\mu} \right) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} d^3 k \end{aligned}$$

Box 16 - Sobre el signo de las exponenciales

El campo de Klein-Gordon es

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{+ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-ik \cdot x} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{i\omega t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}(t)} e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \overline{a_{\mathbf{k}}(t)}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \end{aligned}$$

¹Creo que lo correcto sería decir que $\overline{\phi}$ es hermítico entonces sus autovalores son reales.

Obsérvese detalladamente la convención de signos (indicados en rojo). En muchos lugares se usan notaciones ambiguas y no se indica que cuándo los operadores de creación y destrucción dependen o no del tiempo. Pero es clave ya que los signos se invierten.

Entonces

$$\begin{aligned}
 [\overline{\phi(\mathbf{x}, t)}, \overline{\Pi(\mathbf{y}, t)}] &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[-[\overline{a_{\mathbf{k}}}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}^\dagger] e^{i(kx-k'y)} + [\overline{a_{\mathbf{k}}}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}] e^{i(kx+k'y)} + \dots \right] \leftarrow \begin{cases} k \equiv k^\mu \\ x \equiv x_\mu \end{cases} \\
 &\quad \dots - [\overline{a_{\mathbf{k}}^\dagger}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}^\dagger] e^{-i(kx+k'y)} + [\overline{a_{\mathbf{k}}^\dagger}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}] e^{i(k'y-kx)} \Big] \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{2}} d^3k' \\
 [\overline{a_{\mathbf{k}}}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}^\dagger] = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rightarrow &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(-\delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i(kx-k'y)} - \delta_D^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{i(k'y-kx)} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{2}} d^3k' \\
 \text{Integré en } k' \rightarrow &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)} \right) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} d^3k \\
 \delta_D^3(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} d^3k \rightarrow &= i\delta_D^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})
 \end{aligned}$$

Según Tong el signo menos viene de que $\overline{\Pi(\mathbf{x})} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(-\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ik^\mu x_\mu} \right) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} d^3k \dots$

Problema 3

Ítem a (duda y además validar que esté bien hecho)

Clásicamente el cuadrimento del campo escalar real es (ver guía 2, problema 2, ítem b en página 25)

$$p^\mu = 2\partial^0\phi\partial^\mu\phi - (\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi - m^2\phi^2)\delta^{0\mu} \rightarrow \text{Densidad de cuadrimento clásica}$$

de donde se obtiene

$$\text{Clásicos} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{H} = \Pi^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2 \equiv p^0 \\ \mathbf{p} = 2\Pi\nabla\phi \equiv p^i \end{cases} \leftarrow \text{Son densidades}$$

con $\Pi = \partial^0\phi$ el momento conjugado.

En el caso cuántico promovemos todo a operadores:

$$\begin{aligned}
 \text{Densidad de cuadrimento} \rightarrow \underline{p}^\mu &= 2\partial^0\overline{\phi}\partial^\mu\overline{\phi} - (\partial_\sigma\overline{\phi}\partial^\sigma\overline{\phi} - m^2\overline{\phi}^2)\delta^{0\mu} \\
 &= \begin{cases} \sum_{\zeta=0}^3 (\partial^\zeta\overline{\phi})^2 + m^2\overline{\phi}^2 & \text{para } \mu = 0 \\ 2\partial^0\overline{\phi}\partial^\mu\overline{\phi} & \text{para } \mu \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\text{Densidades} \rightarrow \begin{cases} \overline{\mathcal{H}} = \overline{\Pi}^2 + |\nabla\overline{\phi}|^2 + m^2\overline{\phi}^2 \\ \overline{\mathbf{p}} = 2\overline{\Pi}\nabla\overline{\phi} \end{cases}$$

No debe olvidarse que esto son densidades, las cantidades totales son las integrales en todo el espacio de lo anterior.

La densidad de momento es entonces

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\partial^0 \bar{\phi}}_{\bar{\Pi}} \partial^\mu \bar{\phi} &= \bar{\Pi} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{a}_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} + \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-ik_\mu x^\mu}) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) \\
 &= \bar{\Pi} \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} k^\mu (\bar{a}_{\mathbf{k}} e^{ikx} - \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-ikx}) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} k^0 (\bar{a}_{\mathbf{k}} e^{ikx} - \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-ikx}) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right)}_{\bar{\Pi} = \partial^0 \bar{\phi}, \quad k^0 = \omega_{\mathbf{k}}} \underbrace{\left(\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} p^\mu (\bar{a}_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \bar{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ipx}) \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right)}_{\partial^\mu \bar{\phi}} \\
 &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} k^0 p^\mu (\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{p}} e^{i(k+p)x} - \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{p}} e^{i(p-k)x} - \bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(k-p)x} + \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i(k+p)x}) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}
 \end{aligned}$$

Si ahora integro en todo el espacio a un tiempo t fijo obtengo

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \partial^0 \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} d^3 x &= - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} k^0 p^\mu \left[\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(k+p)x} d^3 x - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(p-k)x} d^3 x + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{p}}^\dagger}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(k-p)x} d^3 x + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{p}}^\dagger}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(k+p)x} d^3 x \right] \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\
 \delta_D^3(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} d^3 k \rightarrow &= - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} k^0 p^\mu \left[\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{k}})t} \delta_D^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{p}}^\dagger}{(2\pi)^3} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{p}}^\dagger}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \right] \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\
 \int d^3 p \Rightarrow \begin{cases} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p} = -\mathbf{k} \\ \delta_D^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k} \end{cases} \rightarrow &= - \int_{\mathbb{R}^3} k^0 k^\mu \left[\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}})t} - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}})t} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}})t} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}})t} \right] \frac{d^3 k}{2} \\
 \omega_{\mathbf{k}} = f(|\mathbf{k}|) \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} k^0 k^\mu \left[-\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}}} e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}}} e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] \frac{d^3 k}{2\omega_{\mathbf{k}}}
 \end{aligned}$$

Para el momento lineal se requiere que $\mu \neq 0$ por lo que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \partial^0 \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} d^3 x &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} k^\mu \left[-\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}}} e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} - \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}}} e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] d^3 k \\
 \text{Los términos impares se anulan} \rightarrow &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} k^\mu \left[\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} \right] d^3 k
 \end{aligned}$$

De este cálculo se puede concluir que el momento total del campo, $\bar{\mathbf{P}} \equiv \int \bar{\mathbf{p}} d^3 x$, es

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k} \left[\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} \right] d^3 k \\
 \left[\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} + \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} \right] &= \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rightarrow = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k} \left[\frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} + \frac{1}{2} \delta_D^3(0) \right] d^3 k \\
 \frac{\mathbf{k}}{2} \delta_D^3(0) \text{ es una función impar} \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k} \frac{\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}} d^3 k \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Obsérvese que no se requirió aplicar lo de orden normal \odot para que converja.

En cuanto al hamiltoniano, hay que calcular $\overline{\mathcal{H}} = \sum_{\zeta=0}^3 (\partial^\zeta \overline{\phi})^2 + m^2 \overline{\phi}^2$. El primer término es

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \overline{\phi})^2 &= \underbrace{\left(\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} k^\mu (\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ikx} - \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ikx}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right)}_{\partial^\mu \overline{\phi}} \underbrace{\left(\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} p^\mu (\overline{a_{\mathbf{p}}} e^{ipx} - \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{-ipx}) \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right)}_{\partial^\mu \overline{\phi}} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} k^\mu p^\mu \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i(k+p)x} - \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i(p-k)x} - \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{i(k-p)x} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{-i(k+p)x} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \end{aligned}$$

y si se integra sobre todo el espacio para un t fijo se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial^\mu \overline{\phi})^2 d^3x &= - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} k^\mu p^\mu \left[\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{p}})t} \delta_D^3(\mathbf{k}+\mathbf{p}) - \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{k}})t} \delta_D^3(\mathbf{p}-\mathbf{k}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{p}})t} \delta_D^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{p}})t} \delta_D^3(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \right] \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\ \text{Integro en } \mathbf{p} \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} (k^\mu)^2 \left[-\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{-\mathbf{k}}} \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{-\mathbf{k}})t}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}})t}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}})t}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} - \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{-\mathbf{k}}}^\dagger \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{-\mathbf{k}})t}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{\omega_{-\mathbf{k}}}} \right] \frac{d^3k}{2} \\ \omega_{\mathbf{k}} = f(|\mathbf{k}|) \rightarrow &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (k^\mu)^2 \left[-\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{-\mathbf{k}}} e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger - \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{-\mathbf{k}}}^\dagger e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

El segundo término es

$$\begin{aligned} \overline{\phi}^2 &= \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-ik^\mu x_\mu}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{a_{\mathbf{p}}} e^{ip^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{-ip^\mu x_\mu}) \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i(k+p)x} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{i(k-p)x} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{-i(k-p)x} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{-i(k+p)x}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo que antes: integrando en $\int d^3x$, luego integrando en $\int d^3p$ y a continuación usando que $\omega_{\mathbf{k}} = f(|\mathbf{k}|)$ se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi}^2 d^3x = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{-\mathbf{k}}} e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{-\mathbf{k}}}^\dagger e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}}$$

Entonces la energía total del campo (no la densidad de energía, la total) es

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (k^\mu)^2 \left[-\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{-\mathbf{k}}} e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger - \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{-\mathbf{k}}}^\dagger e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{m^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{-\mathbf{k}}} e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{-\mathbf{k}}}^\dagger e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

¿¿Cómo llego de eso a

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_{\mathbf{k}} (\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger) d^3k$$

??

Para ver que

$$\left(\prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle$$

es un autoestado del cuadrimomento \overline{P}^μ (o sea, autoestado de $\overline{\mathcal{H}}$ y de $\overline{\mathbf{P}}$) “sólo hay que multiplicarlo y ver qué da” (como si fuera fácil...). Esto es

$$\overline{\mathcal{H}} \prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} \left(\prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \left(\prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle \right) \omega_{\mathbf{k}} d^3k$$

Para seguir la cuenta hay que encontrar el conmutador $[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger]$, esto es

$$\begin{aligned} \left[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right] &= \left[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \underline{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \right] \prod_{i \neq 1} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger + \left[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \underline{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \right] \prod_{i \neq 2} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger + \dots \\ &= \sum_{\ell=1}^n \left[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \underline{a}_{\mathbf{k}_\ell}^\dagger \right] \prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \end{aligned}$$

por lo tanto, usando $[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \underline{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$,

$$\left[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right] = \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger$$

En consecuencia el cálculo con el hamiltoniano sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{a}_{\mathbf{k}} \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) + \underline{a}_{\mathbf{k}} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \right) |0\rangle \omega_{\mathbf{k}} d^3k \leftarrow \text{Esto es lo que ya tenía} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \left[\left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \underline{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right] + [\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{a}_{\mathbf{k}} + \delta_D^3(0)] \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \right) |0\rangle \omega_{\mathbf{k}} d^3k \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger + \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \left[\left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \underline{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \delta_D^3(0) \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \right) |0\rangle \omega_{\mathbf{k}} d^3k \\ &= \sum_{\ell=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \left(\prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}} d^3k |0\rangle + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \delta_D(0) \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}} d^3k |0\rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_\ell}^\dagger \left(\prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}_\ell} |0\rangle + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \delta_D(0) \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}} d^3k |0\rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^n \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}_\ell} |0\rangle + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \delta_D(0) \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}} d^3k |0\rangle \\ &= \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^n \omega_{\mathbf{k}_\ell} \right) \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle}_{\text{A}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \delta_D(0) \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}} d^3k |0\rangle}_{\text{Término que se tira cuando se usa : } \mathcal{H} :} \end{aligned}$$

Como se puede ver el estado $\left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle$ es autoestado del primer término (indicado como **A**) pero no del segundo. De todos modos el segundo término es el que “desaparece” cuando se hace “orden normal” ya que es el término que tiene la $\delta_D^3(0)$.

Para verificar que es autoestado del operador momento total se procede similarmente

$$\begin{aligned} \underline{P} \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{a}_{\mathbf{k}} \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) d^3k |0\rangle \\ \left[\underline{a}_{\mathbf{k}}, \prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right] &= \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \left(\left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \underline{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \left(\prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) \right) d^3k |0\rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^n \mathbf{k}_\ell \underline{a}_{\mathbf{k}_\ell}^\dagger \left(\prod_{i \neq \ell} \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^n \mathbf{k}_\ell \right) \left(\prod_{i=1}^n \underline{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle \end{aligned}$$

Nuevamente se observa que efectivamente se ha obtenido un autoestado de $\overline{\mathbf{P}}$.

Obsérvese que

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{H}} |\psi\rangle = \left(\sum_{\ell=1}^n \omega_{\mathbf{k}_\ell} \right) |\psi\rangle \\ \overline{\mathbf{P}} |\psi\rangle = \left(\sum_{\ell=1}^n \mathbf{k}_\ell \right) |\psi\rangle \end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^n \omega_{\mathbf{k}_\ell} \rightarrow \text{Es la energía total de un estado con } n \text{ partículas} \\ \sum_{\ell=1}^n \mathbf{k}_\ell \rightarrow \text{Es el momento total de un estado con } n \text{ partículas} \end{cases}$$

es decir que se puede asociar a cada ℓ con una partícula distinta.

Ítem b

Esta cuenta debería ser muy similar a las previas. Es

$$\begin{aligned} \overline{N} \left(\prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} \left(\prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) d^3k |0\rangle \\ \left[\overline{a_{\mathbf{k}}} \cdot \prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right] &= \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \prod_{i \neq \ell} \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \left(\left(\prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) \overline{a_{\mathbf{k}}} + \sum_{\ell=1}^n \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\ell) \left(\prod_{i \neq \ell} \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) \right) d^3k |0\rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^n \overline{a_{\mathbf{k}_\ell}}^\dagger \left(\prod_{i \neq \ell} \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^n \right) \left(\prod_{i=1}^{\ell} \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle \\ &= n \left(\prod_{i=1}^{\ell} \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle \end{aligned}$$

por lo tanto efectivamente $\overline{N} |\psi\rangle = n |\psi\rangle \checkmark$.

Problema 7

Ítem a

La función de dos puntos a t iguales es

$$\begin{aligned} \langle 0 | \overline{\phi(\mathbf{x}, 0)} \overline{\phi(\mathbf{y}, 0)} | 0 \rangle &= \langle 0 | \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) (\overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} + \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \langle 0 | \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} + \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \right) | 0 \rangle \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger | 0 \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\ \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger | 0 \rangle = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) &\rightarrow = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

Reemplazando $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$ se obtiene

$$\langle 0 | \overline{\phi(\mathbf{x}, 0)} \overline{\phi(\mathbf{y}, 0)} | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} d^3k$$

Para expresar esto en términos de funciones de Bessel modificadas hay que hacer la integral en esféricas:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\phi(\mathbf{x}, 0)} \overline{\phi(\mathbf{y}, 0)} | 0 \rangle &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty dk k^2 \sin \varphi \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos \varphi}}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\
 \left. \begin{aligned} z &= k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos \varphi \\ \frac{dz}{d\varphi} &= -k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\sin \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \frac{2\pi}{2(2\pi)^3} \int_{k=0}^\infty \int_{z=k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{-k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} k^{\cancel{2}} \cancel{\sin \varphi} \frac{e^{iz}}{\sqrt{k^2 + m^2}} \underbrace{\frac{dz}{-k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cancel{\sin \varphi}}}_{d\varphi} dk \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_{k=0}^\infty \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk \int_{z=-k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} e^{iz} dz \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_0^\infty dk \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{1}{i} \left(e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_0^\infty dk \frac{k \sin(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\
 \text{?} \rightarrow &= \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_0^\infty dt \sinh(t) \sin(mt|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \\
 \text{?} \rightarrow &= \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} K_1(m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)
 \end{aligned}$$

donde $K_1(z)$ es una *función de Bessel modificada de segunda especie*. Aparentemente en el Greiner, en la parte de las funciones Δ , está mejor desarrollada la cuenta.

Problema 15

Ítem a (error de cuenta?)

Utilizando la definición de producto T -ordenado esto es

$$\Delta(x-y) = -i \langle 0 | T \left(\overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)}^\dagger \right) | 0 \rangle$$

$$\text{Definición de } T(\) \rightarrow = -i \langle 0 | \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)}^\dagger | 0 \rangle \Theta_H(x^0 - y^0) - i \langle 0 | \overline{\phi(y)}^\dagger \overline{\phi(x)} | 0 \rangle \Theta_H(y^0 - x^0)$$

Ahora calculo las funciones de dos puntos usando las expresiones del campo complejo

$$\begin{cases} \overline{\phi(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ \overline{\phi(x)}^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{ik^\mu x_\mu} + \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-ik^\mu x_\mu} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \end{cases}$$

es decir

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)}^\dagger | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overbrace{\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger | 0 \rangle}^{\delta_D^3(k-p)} e^{-ikx+ipy} + \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}} | 0 \rangle e^{-ikx-ipy} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger | 0 \rangle e^{ikx+ipy} + \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{p}}} | 0 \rangle e^{ikx-ipy} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} d^3k
 \end{aligned}$$

$$W_2(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(x-y)}}{2\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} d^3k \rightarrow = W_2(y-x)$$

y

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \overline{\phi(y)}^\dagger \overline{\phi(x)} | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{p}}}^\dagger | 0 \rangle e^{-iky+ipx} + \text{otras cosas} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik(y-x)}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} d^3k \\
&= W_2(x-y)
\end{aligned}$$

En consecuencia el propagador resulta ser

$$\Delta(x-y) = -iW_2(y-x) \Theta_H(x^0 - y^0) - iW_2(x-y) \Theta_H(y^0 - x^0)$$

ME QUEDÓ AL REVÉS, A DÓNDE ESTÁ EL ERROR? En clase nos quedó lo mismo pero al revés...

Ítem b (ni idea)

Ítem c (Falta resolver!)

Pregunté al docente y $D(x-y) \equiv \Delta(x-y)$ del ítem (a).

Guía 4A - Cuantización canónica del campo de Dirac

Problema 1

Verificación de ecuación de Dirac El operador de campo de Dirac es

$$\overline{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \left(u_{k,s} \overline{b_{k,s}} e^{-ikx} + v_{k,s} \overline{d_{k,s}}^\dagger e^{ikx} \right) \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} d^3k$$

con $u_{k,s}$ y $v_{k,s}$ soluciones de la ecuación de Dirac. En particular $\begin{cases} u_{k,s} = \begin{bmatrix} \xi_s \\ \frac{\sigma \cdot k}{\omega_k + m} \xi_s \end{bmatrix} \\ v_{k,s} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma \cdot k}{\omega_k + m} \xi_s \\ \xi_s \end{bmatrix} \end{cases}$ con $\begin{cases} \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$ en la cuando las γ^μ están en la representación de Dirac (lo pregunté en clase). Para verificar que cumple la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \overline{\psi} = 0$$

simplemente hay que aplicar el operador $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$ a la expresión de la consigna:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \overline{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \left(\underbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) u_{k,s} e^{-ikx}}_{\equiv 0 \text{ pues } u_{k,s} \text{ es solución}} \overline{b_{k,s}} + \underbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) v_{k,s} e^{ikx}}_{\equiv 0 \text{ pues } v_{k,s} \text{ es solución}} \overline{d_{k,s}}^\dagger \right) \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} d^3k$$

El hecho de que $u_{k,s}$ y $v_{k,s}$ son soluciones de la ecuación de Dirac implica que

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \begin{Bmatrix} u_{k,s} e^{-ikx} \\ v_{k,s} e^{ikx} \end{Bmatrix} = 0$$

por lo tanto se verifica así que $\overline{\psi}$ satisface la ecuación de Dirac.

Verificación de las relaciones de Heisenberg El momento canónico conjugado del campo de Dirac es [4, eq. (5.2)]

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \overline{\psi})} \\ \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \overline{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &\rightarrow = i \overline{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi \\ \overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 &\rightarrow = i \overline{\psi}^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \\ (\gamma^\mu)^2 \equiv \mathbf{1} &\rightarrow = i \overline{\psi}^\dagger \end{aligned}$$

por lo que

$$\left\{ \overline{\psi}(x), \overline{\Pi}(y) \right\} =$$

Problema 2

Ítem a (resultado raro)

Una traslación espacio-temporal se puede parametrizar de la misma forma que se hizo en el problema 2 (a) de la guía 2, es decir dada por la transformación

$$(y_a)^\mu = x^\mu + \varepsilon_a \delta^\mu_a$$

con $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ parametrizando si la transformación es en t , en x , ... En dicho problema se verificó que las transformaciones a primer orden en ε_a vienen dadas por

$$\begin{cases} (\delta x^\mu)_a = \varepsilon_a \delta^\mu_a \\ (\delta \psi)_a = \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \psi \\ (\delta (\partial_\mu \psi))_a = \partial_\mu (\delta \psi)_a \end{cases} \quad \text{El índice } a \text{ no está contraído, está fijo en uno de } a \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Lo mismo se aplica a $\overline{\psi}$.

La corriente $(J_a)^\mu$ asociada a la transformación dada por $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ viene dada por

$$\begin{aligned} \text{El } a \text{ no se contrae, está fijo! } \rightarrow \varepsilon_a (J_a)^\mu &= \left[\sum_{\forall \text{ campos } \psi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} (\delta \psi_i)_a \right] - \mathcal{L} (\delta x^\mu)_a \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} (\delta \psi)_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} (\delta \bar{\psi})_a - \mathcal{L} (\delta x^\mu)_a \\ \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \rightarrow &= i\bar{\psi} \gamma^\mu (\delta \psi)_a - \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi (\delta x^\mu)_a \\ \left. \begin{aligned} (\delta x^\mu)_a &= \varepsilon_a \delta^\mu_a \\ (\delta \psi)_a &= \varepsilon_a \delta^\mu_a \partial_\mu \psi \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \cancel{i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \varepsilon_a \delta^\mu_a} - \bar{\psi} (\cancel{i\gamma^\mu \partial_\mu} - m) \psi \varepsilon_a \delta^\mu_a \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(J_a)^\mu = m \delta^\mu_a \bar{\psi} \psi$$

(este resultado es medio raro pues la energía es igual al momento... Y todas las componentes del momento son iguales... No tiene mucho sentido...).

Debido a que la transformación es de simetría $\forall a \in \{0, 1, 2, 3\}$ entonces el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu (J_a)^\mu = 0$$

que es lo mismo que

$$\frac{\partial}{\partial t} (J_a)^0 = \nabla \cdot \mathbf{J}_a$$

donde \mathbf{J}_a son las componentes espaciales de $(J_a)^\mu$. Para $a = 0$ esto es la ley de conservación de la energía mientras que para $a = 1, 2, 3$ es la ley de conservación del impulso lineal.

Otro approach para encontrar el Hamiltoniano El hamiltoniano de Dirac es [4, eq. (5.8)]

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\Pi} \partial_0 \bar{\psi} - \underline{\mathcal{L}}) d^3x \\ \left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ \bar{\Pi} = i\bar{\psi}^\dagger \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} (i\bar{\psi}^\dagger \partial_0 \bar{\psi} - \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi) d^3x \\ \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} (i\bar{\psi}^\dagger \partial_0 \bar{\psi} - i\bar{\psi}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + m \bar{\psi}^\dagger \gamma^0 \bar{\psi}) d^3x \\ (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} (-i\bar{\psi}^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \bar{\psi} + m \bar{\psi}^\dagger \gamma^0 \bar{\psi}) d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \bar{\psi} d^3x \checkmark \end{aligned}$$

Para expresarlo en términos de los operadores de creación y destrucción lo que hay que hacer es reemplazar a $\bar{\psi}$ y $\underline{\bar{\psi}}$ por sus expresiones en términos de éstos. Para avanzar por partes (como lo hace Tong) comienzo con

$$(-i\gamma^i \partial_i + m) \bar{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \left((-i\gamma^i \partial_i + m) u_{k,s} \overline{b_{\mathbf{k},s}} e^{-ikx} + (-i\gamma^i \partial_i + m) v_{k,s} \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger e^{ikx} \right) \sqrt{\frac{m}{\omega_{\mathbf{k}}}} d^3k$$

Como $u_{k,s}$ y $v_{k,s}$ son soluciones de la ecuación de Dirac entonces

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \begin{Bmatrix} u_{k,s} \\ v_{k,s} \end{Bmatrix} = 0 \quad \iff \quad -(i\gamma^i \partial_i - m) = i\gamma^0 \partial_0 \begin{Bmatrix} u_{k,s} \\ v_{k,s} \end{Bmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} (-i\gamma^i \partial_i + m) \bar{\psi} &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \left(\gamma^0 u_{k,s} \overline{b_{\mathbf{k},s}} \partial_0 e^{-ikx} + \gamma^0 v_{k,s} \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger \partial_0 e^{ikx} \right) \sqrt{\frac{m}{\omega_{\mathbf{k}}}} d^3k \\ &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \left(\gamma^0 u_{k,s} \overline{b_{\mathbf{k},s}} (-i\omega_{\mathbf{k}}) e^{-ikx} + \gamma^0 v_{k,s} \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger (i\omega_{\mathbf{k}}) e^{ikx} \right) \sqrt{\frac{m}{\omega_{\mathbf{k}}}} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \gamma^0 \left(u_{k,s} \overline{b_{\mathbf{k},s}} e^{-ikx} - v_{k,s} \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger e^{ikx} \right) \sqrt{m\omega_{\mathbf{k}}} d^3k \end{aligned}$$

Volviendo al hamiltoniano ahora se puede multiplicar por $\overline{\psi}$ para obtener

$$\begin{aligned} \overline{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \underbrace{\left(u_{k,s}^\dagger \gamma^0 \overline{b_{k,s}}^\dagger e^{ikx} + v_{k,s}^\dagger \gamma^0 \overline{d_{k,s}} e^{-ikx} \right)}_{\overline{\psi}} \dots \\ &\dots \underbrace{\left(u_{p,r} \overline{b_{p,r}} e^{-ipx} - v_{p,r} \overline{d_{p,r}}^\dagger e^{ipx} \right)}_{(-i\gamma^i \partial_i + m) \psi} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_k}} d^3 k d^3 p \\ \gamma^0 \gamma^0 \equiv \mathbb{1} \rightarrow &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \left(u_{k,s}^\dagger u_{p,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{b_{p,r}} e^{ikx-ipx} - u_{k,s}^\dagger v_{p,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{d_{p,r}}^\dagger e^{ikx+ipx} + \dots \right. \\ &\left. \dots + v_{k,s}^\dagger u_{p,r} \overline{d_{k,s}} \overline{b_{p,r}} e^{-ikx-ipx} - v_{k,s}^\dagger v_{p,r} \overline{d_{k,s}} \overline{d_{p,r}}^\dagger e^{-ikx+ipx} \right) \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_k}} d^3 k d^3 p \end{aligned}$$

Introduciendo esto en el hamiltoniano, i.e. agregando una integración $\int d^3 x$, se hacen colapsar las exponenciales en deltas de Dirac y se puede hacer la integral en p (o en k). Esto es

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi d^3 x \\ &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \left(u_{k,s}^\dagger u_{p,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{b_{p,r}} e^{ikx-ipx} - u_{k,s}^\dagger v_{p,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{d_{p,r}}^\dagger e^{ikx+ipx} + \dots \right. \\ &\left. \dots + v_{k,s}^\dagger u_{p,r} \overline{d_{k,s}} \overline{b_{p,r}} e^{-ikx-ipx} - v_{k,s}^\dagger v_{p,r} \overline{d_{k,s}} \overline{d_{p,r}}^\dagger e^{-ikx+ipx} \right) \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_k}} d^3 k d^3 p d^3 x \\ \delta_D^3(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik \cdot x}}{(2\pi)^3} d^3 k \rightarrow &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \left(u_{k,s}^\dagger u_{p,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{b_{p,r}} e^{i(\omega_k - \omega_p)} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \dots \right. \\ &\left. \dots - u_{k,s}^\dagger v_{p,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{d_{p,r}}^\dagger e^{i(\omega_k + \omega_p)} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) + v_{k,s}^\dagger u_{p,r} \overline{d_{k,s}} \overline{b_{p,r}} e^{-i(\omega_k + \omega_p)} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) + \dots \right. \\ &\left. \dots - v_{k,s}^\dagger v_{p,r} \overline{d_{k,s}} \overline{d_{p,r}}^\dagger e^{i(\omega_p - \omega_k)} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right) \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_k}} d^3 k d^3 p \\ \text{Integré en } d^3 p \rightarrow &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \left(u_{k,s}^\dagger u_{k,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{b_{k,r}} - u_{k,s}^\dagger v_{\eta k,r} \overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{d_{-k,r}} e^{2i\omega_k} + \dots \right. \\ &\left. \dots + v_{k,s}^\dagger u_{\eta k,r} \overline{d_{k,s}} \overline{b_{-k,r}} e^{-2i\omega_k} - v_{k,s}^\dagger v_{k,s} \overline{d_{k,s}} \overline{d_{k,r}}^\dagger \right) \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k}} d^3 k \end{aligned}$$

donde la notación ηk significa invertir la parte espacial, es decir $(k^0, -\mathbf{k})$. A continuación se puede hacer uso de las relaciones

de ortogonalidad $\begin{cases} u_{k,r}^\dagger u_{k,s} = \frac{k^0}{m} \delta_{rs} \\ v_{k,r}^\dagger v_{k,s} = \frac{k^0}{m} \delta_{rs} \\ u_{k,r}^\dagger v_{\eta k,s} = v_{k,r}^\dagger u_{\eta k,s} = 0 \end{cases}$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \omega_k \delta_{rs} \left(\overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{b_{k,r}} - \overline{d_{k,s}} \overline{d_{k,r}}^\dagger \right) d^3 k \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \omega_k \left(\overline{b_{k,s}}^\dagger \overline{b_{k,s}} - \overline{d_{k,s}} \overline{d_{k,s}}^\dagger \right) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \checkmark \end{aligned}$$

Utilizando la relación de anticonmutación $\left\{ \overline{d_{k,r}}, \overline{d_{p,s}}^\dagger \right\} = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{rs}$ el hamiltoniano se puede reescribir como

$$\overline{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \omega_k \left(\overline{n_{k,s}^b} + \overline{n_{k,s}^d} - \delta_D^3(0) \right) d^3 k$$

donde $\overline{n_{\mathbf{k},s}^b} \equiv \overline{b_{\mathbf{k},s}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k},s}}$ y $\overline{n_{\mathbf{k},s}^d} \equiv \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger \overline{d_{\mathbf{k},s}}$ son los operadores “número de partículas de tipo b y d ” respectivamente, es decir número de partículas y antipartículas. El término $\delta_D^3(0) \equiv \infty$ es el que se tira cuando hacemos orden normal. Está todo bien, no hay que preocuparse por este infinito ☺.

El cuadrimomento del campo de Dirac es [1, eq. (13.3.20)]

$$\overline{P^\mu} = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 k^\mu \left(\overline{b_{\mathbf{k},s}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k},s}} - \overline{d_{\mathbf{k},s}} \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

No tengo tiempo de hacer la cuenta, lamentablemente. Pero en la referencia citada hay un desarrollo.

Problema 4

(ver [1, p. 272]) La transformación

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\varepsilon} \psi$$

es tal que para $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que

$$\begin{cases} \psi' \approx (1 + i\varepsilon) \psi \\ \overline{\psi}' \approx (1 - i\varepsilon) \overline{\psi} \end{cases}$$

de donde se ve que, a primer orden en ε ,

$$\text{A primer orden en } \varepsilon \rightarrow \begin{cases} \delta\psi = i\varepsilon\psi \\ \delta\overline{\psi} = -i\varepsilon\overline{\psi} \end{cases}$$

La corriente de Noether es

$$\begin{aligned} \varepsilon J^\mu &= \left(\sum_{\forall \text{campos } \phi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i \right) - F^\mu? \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \overline{\psi})} \delta\overline{\psi} \\ \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \overline{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &\rightarrow = \overline{\psi} i\gamma^\mu i\varepsilon\psi \\ &= -\varepsilon \overline{\psi} \gamma^\mu \psi \\ \text{El resultado no depende del signo} &\rightarrow \sim \varepsilon \overline{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

y dado que $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\varepsilon} \psi$ es una transformación de simetría entonces esta corriente debe satisfacer $\partial_\mu J^\mu = 0$, o bien

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad \iff \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial J^0}{\partial t} d^3x = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x}_{\text{ff } \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} J^0 d^3x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^3} J^0 d^3x \text{ es una cantidad conservada!}$$

y esta cantidad resulta ser la carga eléctrica. Es decir

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi} \gamma^0 \psi d^3x \\ \left. \begin{aligned} \overline{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \\ \gamma^0 \gamma^0 &\equiv \mathbb{1} \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi^\dagger \psi d^3x \end{aligned}$$

Al cuantizar todo se promueve a operadores:

$$\overline{Q} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}^\dagger \overline{\psi} d^3x \rightarrow \text{Quantization}$$

Voy a proceder por fuerza bruta: reemplazo el desarrollo de $\overline{\psi}$ en términos de los operadores de creación y destrucción y veo qué da. Antes de comenzar hay que recordar que en el caso de Dirac el producto T ordenado es

$$T\left(\overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)}\right) = \begin{cases} \overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\overline{\psi_\beta(y)} \overline{\psi_\alpha(x)} & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases}$$

donde el término con $x^0 < y^0$ tiene un signo negativo pues al tratarse de fermiones cada inversión saca un -1 . Entonces

$$iS_{\alpha\beta}(x-y) = \Theta_H(x^0 - y^0) \langle 0 | \overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} | 0 \rangle - \Theta_H(y^0 - x^0) \langle 0 | \overline{\psi_\beta(y)} \overline{\psi_\alpha(x)} | 0 \rangle$$

El primer término es

Para el caso $x^0 > y^0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} | 0 \rangle &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \langle 0 | \left((u_{k,s})_\alpha \overline{b_{k,s}} e^{-ikx} + (v_{k,s})_\alpha \overline{d_{k,s}}^\dagger e^{ikx} \right) \dots \\ &\quad \dots \left((\overline{u_{p,r}})_\beta \overline{b_{p,r}}^\dagger e^{ipy} + (\overline{v_{p,r}})_\beta \overline{d_{p,r}} e^{-ipy} \right) | 0 \rangle \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \frac{d^3p}{\sqrt{\omega_p}} \\ &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \left((u_{k,s})_\alpha (\overline{u_{p,r}})_\beta \langle 0 | \overline{b_{k,s}} \overline{b_{p,r}}^\dagger | 0 \rangle e^{-ikx+ipy} + \dots \right. \\ &\quad \dots + (u_{k,s})_\alpha (\overline{v_{p,r}})_\beta \langle 0 | \overline{b_{k,s}} \overline{d_{p,r}} | 0 \rangle e^{-ikx-ipy} + \dots \\ &\quad \dots + (v_{k,s})_\alpha (\overline{u_{p,r}})_\beta \langle 0 | \overline{d_{k,s}}^\dagger \overline{b_{p,r}}^\dagger | 0 \rangle e^{ikx+ipy} + \dots \\ &\quad \left. \dots + (v_{k,s})_\alpha (\overline{v_{p,r}})_\beta \langle 0 | \overline{d_{k,s}}^\dagger \overline{d_{p,r}} | 0 \rangle e^{ikx-ipy} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \frac{d^3p}{\sqrt{\omega_p}} \\ &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 (u_{k,s})_\alpha (\overline{u_{p,r}})_\beta \underbrace{\langle 0 | \overline{b_{k,s}} \overline{b_{p,r}}^\dagger | 0 \rangle}_{\delta_{sr} \delta_D^3(k-p)} e^{-ikx+ipy} \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \frac{d^3p}{\sqrt{\omega_p}} \\ &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 (u_{k,s})_\alpha (\overline{u_{k,s}})_\beta e^{-ik(x-y)} \frac{d^3k}{\omega_k} \end{aligned}$$

Ahora se hace uso de la fórmula de producto externo [4, eq. (4.128)] $\sum_{s=1}^2 u_{k,s} \overline{u_{k,s}} = \frac{k+m}{2m}$ con lo cual

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 (u_{k,s})_\alpha (\overline{u_{k,s}})_\beta &= \frac{(k^\mu \gamma_\mu)_{\alpha\beta} + m}{2m} \\ &= \frac{k^\mu (\gamma_{\alpha\beta})_\mu + m}{2m} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \langle 0 | \overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} | 0 \rangle &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{k^\mu (\gamma_{\alpha\beta})_\mu + m}{2m} e^{-ik(x-y)} \frac{d^3k}{\omega_k} \\ \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial(x-y)^\mu} \rightarrow &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{i\partial^\mu (\gamma_{\alpha\beta})_\mu + m}{2m} e^{-ik(x-y)} \frac{d^3k}{\omega_k} \\ &= (i\cancel{\partial}_{\alpha\beta} + m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik(x-y)}}{2\omega_k} d^3k \\ D(x-y) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik(x-y)}}{2\omega_k} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow &= (i\cancel{\partial}_{\alpha\beta} + m) D(x-y) \end{aligned}$$

El otro término del producto T ordenado es

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\psi_\beta(y)} \overline{\psi_\alpha(x)} | 0 \rangle &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \langle 0 | \left((\overline{u_{p,r}})_\beta \overline{b_{p,r}}^\dagger e^{ipy} + (\overline{v_{p,r}})_\beta \overline{d_{p,r}} e^{-ipy} \right) \dots \\
 &\quad \dots \left((u_{k,s})_\alpha \overline{b_{k,s}} e^{-ikx} + (v_{k,s})_\alpha \overline{d_{k,s}}^\dagger e^{ikx} \right) | 0 \rangle \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} \\
 &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\overline{v_{p,r}})_\beta (v_{k,s})_\alpha \underbrace{\langle 0 | \overline{d_{p,r}} \overline{d_{k,s}}^\dagger | 0 \rangle}_{\delta_{rs} \delta_D^3(\mathbf{k}-\mathbf{p})} e^{ikx-ipy} \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3p}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} \\
 &= \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=1}^2 (\overline{v_{k,s}})_\beta (v_{k,s})_\alpha e^{ik(x-y)} \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}}
 \end{aligned}$$

Ahora aplico la fórmula de producto externo para los $v_{k,s}$, i.e. $\sum_{s=1}^2 v_{k,s} \overline{v_{k,s}} = \frac{k^\mu - m}{2m}$ con lo cual (obsérvese que $[(\overline{v_{k,s}})_\beta, (v_{k,s})_\alpha] = 0$ ya que son sólo números)

$$\sum_{s=1}^2 (v_{k,s})_\alpha (\overline{v_{k,s}})_\beta = \frac{k^\mu (\gamma_{\alpha\beta})_\mu - m}{2m}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\psi_\beta(y)} \overline{\psi_\alpha(x)} | 0 \rangle &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (k^\mu (\gamma_{\alpha\beta})_\mu - m) e^{-ik(y-x)} \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \\
 \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial(x-y)^\mu} \rightarrow &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (-i\partial^\mu (\gamma_{\alpha\beta})_\mu - m) e^{-ik(y-x)} \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \\
 &= -(i\cancel{\partial}_{\alpha\beta} + m) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik(y-x)}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\
 D(x-y) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik(x-y)}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow &= -(i\cancel{\partial}_{\alpha\beta} + m) D(y-x)
 \end{aligned}$$

Juntando estos dos resultados

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \left(\overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} \right) | 0 \rangle &= \begin{cases} \langle 0 | \overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} | 0 \rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \overline{\psi_\beta(y)} \overline{\psi_\alpha(x)} | 0 \rangle & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (i\cancel{\partial}_{\alpha\beta} + m) D(x-y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ (i\cancel{\partial}_{\alpha\beta} + m) D(y-x) & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalmente recordando que $\Delta_F(x-y) = \begin{cases} D(x-y) & x^0 > y^0 \\ D(y-x) & x^0 < y^0 \end{cases}$ y que $S_{\alpha\beta}(x-y) = -i \langle 0 | T \left(\overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} \right) | 0 \rangle$ entonces

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = -i (i\cancel{\partial} + m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x-y)$$

Me sobró el $-i$ que no sé cómo sacar...

Guía 4B - Cuantización canónica de campos de espín y helicidad 1

Problema 1

Ítem a

Reemplazando $F_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ el lagrangiano de Proca es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Proca}} &= -\frac{(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu)(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)}{2} + \frac{m^2}{2} Z_\mu Z^\mu \\ &= -\frac{\partial^\mu Z^\nu \partial_\mu Z_\nu - \partial^\mu Z^\nu \partial_\nu Z_\mu - \partial^\nu Z^\mu \partial_\mu Z_\nu + \partial^\nu Z^\mu \partial_\nu Z_\mu}{2} + \frac{m^2}{2} Z_\mu Z^\mu\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z^\nu} = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange}$$

es decir que en total son cuatro ecuaciones variando $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Como siempre, calculo cada pedazo de la ecuación por partes: el primer término es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\partial^\alpha Z^\beta \partial_\alpha Z_\beta)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} - \frac{\partial (\partial^\alpha Z^\beta \partial_\beta Z_\alpha)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} - \frac{\partial (\partial^\beta Z^\alpha \partial_\alpha Z_\beta)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} + \frac{\partial (\partial^\beta Z^\alpha \partial_\beta Z_\alpha)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \right] \\ &= \frac{\partial (\partial^\alpha Z^\beta \partial_\beta Z_\alpha)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} - \frac{\partial (\partial^\alpha Z^\beta \partial_\alpha Z_\beta)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)}\end{aligned}$$

Estas derivadas son un poco intrincadas en lo que respecta a la notación de índices (al menos para mí). Voy a hacerlas paso a paso a cada una para estar seguro. Arranco con

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\partial^\alpha Z^\beta \partial_\alpha Z_\beta)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} (\eta^{\alpha\lambda} \partial_\lambda Z^\beta \partial_\alpha \eta_{\beta\kappa} Z^\kappa) \\ &= \eta^{\alpha\lambda} \eta_{\beta\kappa} \frac{\partial (\partial_\lambda Z^\beta \partial_\alpha Z^\kappa)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \\ &= \eta^{\alpha\lambda} \eta_{\beta\kappa} \left[\frac{\partial (\partial_\lambda Z^\beta)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \partial_\alpha Z^\kappa + \partial_\lambda Z^\beta \frac{\partial (\partial_\alpha Z^\kappa)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \right] \\ &= \eta^{\alpha\lambda} \eta_{\beta\kappa} [\delta^\lambda_\mu \delta^\beta_\nu \partial_\alpha Z^\kappa + \partial_\lambda Z^\beta \delta^\alpha_\mu \delta^\kappa_\nu] \\ &= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\nu\kappa} \partial_\alpha Z^\kappa + \partial_\lambda Z^\beta \eta^{\mu\lambda} \eta_{\beta\nu} \\ &= 2\partial^\mu Z_\nu\end{aligned}$$

La otra derivada es

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\partial^\alpha Z^\beta \partial_\beta Z_\alpha)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} &= \overbrace{\eta^{\alpha\lambda} \eta_{\alpha\kappa}}^{\eta_\kappa^\lambda \equiv \delta^\kappa_\lambda} \frac{\partial (\partial_\lambda Z^\beta \partial_\beta Z^\kappa)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \\ &= \frac{\partial (\partial_\alpha Z^\beta \partial_\beta Z^\alpha)}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \\ &= \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \partial_\beta Z^\alpha + \partial_\alpha Z^\beta \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu \\ &= 2\partial_\nu Z^\mu\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} = 2(\partial_\nu Z^\mu - \partial^\mu Z_\nu)$$

y

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu Z^\nu)} \right) = 2(\partial_\mu \partial_\nu Z^\mu - \partial_\mu \partial^\mu Z_\nu)$$

El otro término del lagrangiano es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z^\nu} &= \frac{m^2}{2} \frac{\partial (Z_\mu Z^\mu)}{\partial Z^\nu} \\ &= \frac{m^2}{2} (\eta_{\mu\alpha} \delta^\alpha_\nu Z^\mu + Z_\nu) \\ &= m^2 Z_\nu\end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son, para cada $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu Z^\mu - \partial_\mu \partial^\mu Z_\nu - \frac{m^2}{2} Z_\nu &= 0 \\ \partial_\nu (\partial_\mu Z^\mu) - \left(\square^2 + \frac{m^2}{2} \right) Z_\nu &= \end{aligned}$$

Usando la condición de transversalidad

$$\partial_\mu Z^\mu = 0 \rightarrow \text{Condición de transversalidad}$$

que surge del hecho de que Z^μ tiene espín 1 finalmente se obtiene que

$$\begin{cases} (\square^2 + m^2) Z^\mu = 0 \\ \partial_\mu Z^\mu = 0 \end{cases}$$

(no sé por qué me quedó $\frac{m^2}{2}$ a mí, pero ya fue).

Ítem b

Se pide verificar que

$$(Z_k)^\mu = (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu e^{-ikx} + (\varepsilon_{k,\lambda}^*)^\mu e^{ikx}$$

satisface $\begin{cases} (\square^2 + m^2) Z^\mu = 0 \\ \partial_\mu Z^\mu = 0 \end{cases}$. La condición de transversalidad $\partial_\mu Z^\mu = 0$ sale de la ortogonalidad entre los $\varepsilon_{k,\lambda}$ y el k :

$$\partial_\mu (Z_k)^\mu = (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu k_\mu e^{-ikx} + (\varepsilon_{k,\lambda}^*)^\mu k_\mu e^{ikx}$$

Por construcción los $\varepsilon_{k,\lambda}$ son ortogonales a el k .

La ecuación $(\square^2 + m^2)$ es "trivial" ya que $\square^2 Z^\mu = -k^\nu k_\nu Z^\mu$ y $k^\nu k_\nu = m^2$.

Problema 5 (Preguntar)

La primera condición es quasi-trivial

$$\square^2 \overline{A}_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\lambda=0}^3 \underbrace{k^\nu k_\nu}_{\equiv 0} \left(-(\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}} e^{-ikx} + (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}^\dagger e^{ikx} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

donde $k^\nu k_\nu \equiv 0$ pues para el campo electromagnético k es un cuadvivector nulo, es decir que por definición $k^\mu k_\mu = 0$.

La otra ecuación es

$$\partial_\mu \overline{A}^\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\lambda=0}^3 ik_\mu \left(-(\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}} e^{-ikx} + (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}^\dagger e^{ikx} \right) \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

Para ver que esto es $\neq 0$ hay que mostrar que \nexists cuatro cuadvivectores $\varepsilon_{k,\lambda}$, etiquetados por $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$, tales que $k_\mu (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu$ siendo todos los $\varepsilon_{k,\lambda}$ ortogonales entre sí y además $k^\mu k_\mu = 0$. Para ver esto considérese la base ortonormal [4, eq. (6.44)]

$$(\varepsilon_{k,\lambda})^\mu = \delta^\mu_\lambda \rightarrow \text{Base orto normal}$$

tal que [4, eq. (6.42)]

$$(\varepsilon_{k,\lambda})^\mu (\varepsilon_{k,\lambda'})^\nu \eta^{\lambda\lambda'} = \eta^{\mu\nu}$$

En este caso en particular se tiene que

$$\begin{aligned} k_\mu (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu &= k_\mu \delta^\mu_\lambda \\ &= k_\lambda \end{aligned}$$

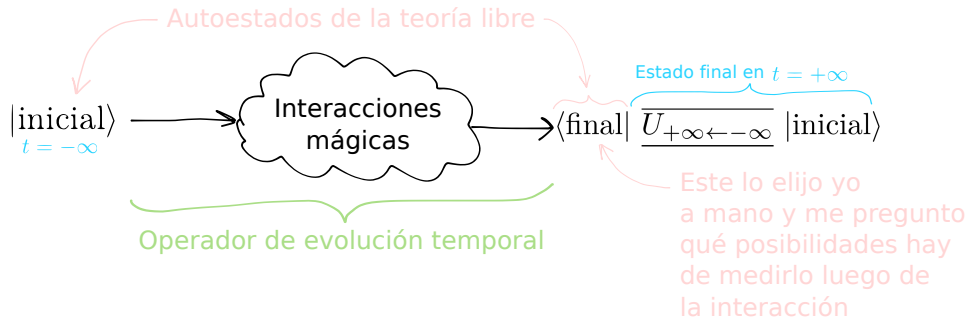
por lo tanto, a menos que $k \equiv 0$, no se puede satisfacer la condición.

PREGUNTA: Lo anterior lo probé para una base particular de los $\varepsilon_{k,\lambda}$. Está bien así? Me suena que no tiene mucho sentido ya que si los ε forman una base, no existe ningún k que sea ortogonal a todos.

Guía 5A - Interacciones y cálculo perturbativo de amplitudes de scattering

Teoría de procesos de scattering

Los procesos de scattering se modelan de la siguiente manera:



es decir

- Se prepara un estado $|\text{inicial}\rangle$ que es autoestado de la teoría libre y es conocido, por ejemplo dos electrones con momentos conocidos.
- Se deja evolucionar al estado inicial de acuerdo a la teoría de campos, por ejemplo se hace colisionar a los electrones.
- Se elige un estado $|\text{final}\rangle$ que es también autoestado de la teoría libre y nos hacemos la pregunta sobre qué posibilidades hay de medirlo.

Entonces la pregunta principal que uno se hace en un proceso de scattering es por la probabilidad

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\text{inicial}\rangle \rightarrow |\text{final}\rangle) &= \left| \langle \text{final} | \overline{U_{+\infty \leftarrow -\infty}} | \text{inicial} \rangle \right|^2 \\ &= \left| \langle \text{final}_I | \overline{S} | \text{inicial}_I \rangle \right|^2 \leftarrow \text{WARNING: cosas en picture de interacción} \end{aligned}$$

donde \overline{S} es el operador de scattering que se define como [1, eq. (15.3.2)]

$$\overline{S} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{U_{+\infty \leftarrow -\infty}}' \rightarrow \text{Operador de scattering}$$

donde $\overline{U_{+\infty \leftarrow -\infty}}'$ es “el operador de evolución temporal en el picture de interacción entre el tiempo $-\infty$ y el tiempo $+\infty$ ”.

El picture de interacción

Dado un lagrangiano

$$\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}_0 + \overline{\mathcal{L}}_1$$

donde $\overline{\mathcal{L}}_0$ es el de la teoría libre y $\overline{\mathcal{L}}_1$ es el término de interacción (por ejemplo $\overline{\phi}^4$) y asumiendo que $\overline{\mathcal{L}}_1$ no contiene derivadas entonces

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} &= \overline{\mathcal{H}}_0 + \overline{\mathcal{H}}_1 \\ \text{Sólo cuando } \overline{\mathcal{L}}_1 \text{ no contiene derivadas } \rightarrow &= \overline{\mathcal{H}}_0 - \overline{\mathcal{L}}_1 \end{aligned}$$

es decir que

$$\overline{\mathcal{H}}_1 = -\overline{\mathcal{L}}_1 \rightarrow \text{Cuando } \overline{\mathcal{L}}_1 \text{ no contiene derivadas!}$$

Se definen las cantidades en el picture de interacción como

$$\text{Interaction picture } \rightarrow \begin{cases} |\psi_I(t)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} |\psi(t)\rangle \\ \overline{A}_I(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} \overline{A} e^{-i\overline{\mathcal{H}}_0 t} \end{cases}$$

donde las cantidades $|\psi(t)\rangle$ y \overline{A} , son en el picture de Schrödinger.

De Teórica 2 sabemos que las cosas en el picture de Schrödinger satisfacen la ecuación de Schrödinger, es decir que

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \overline{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle \leftarrow \text{Ec. de Schrödinger}$$

cuya solución es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\overline{\mathcal{H}}_S(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \leftarrow \text{Solución de Schrödinger}$$

Esto mismo en la representación de interacción es

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} |\psi(t)\rangle \\ \text{Solución de Schrödinger} \rightarrow &= e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} \overbrace{e^{-i\overline{\mathcal{H}}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle}^{|\psi(t)\rangle} \\ &= e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} e^{-i\overline{\mathcal{H}}(t-t_0)} \underbrace{e^{-i\overline{\mathcal{H}}_0 t} |\psi_I(t_0)\rangle}_{|\psi(t_0)\rangle} \end{aligned}$$

o bien

$$|\psi_I(t)\rangle = \overline{U_{t \leftarrow t_0}}' |\psi_I(t_0)\rangle$$

donde

$$\overline{U_{t \leftarrow t_0}}' \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} e^{-i\overline{\mathcal{H}}(t-t_0)} e^{-i\overline{\mathcal{H}}_0 t} \rightarrow \text{Evolución temporal en el picture de interacción}$$

es el operador de evolución temporal en el picture de interacción. Diferenciando esta expresión respecto al tiempo se puede verificar que este operador satisface la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \overline{U_{t \leftarrow t_0}}' = \overline{\mathcal{H}}_I(t) \overline{U_{t \leftarrow t_0}}' \leftarrow \text{Eq. de movimiento para } \overline{U_{t \leftarrow t_0}}'$$

Perturbaciones (serie de Dyson) (preguntas)

La ecuación de movimiento para $\overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}}'$ puede ser resuelta utilizando una expresión perturbativa (serie de Dyson) que es [1, eq. (15.2.19)]

$$\begin{aligned} \overline{U_{t \leftarrow t_0}}' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\left(\overline{\mathcal{H}}_{1I}(t_1), \overline{\mathcal{H}}_{1I}(t_2), \dots, \overline{\mathcal{H}}_{1I}(t_n)\right) \\ &\equiv T\left(e^{-i \int_{t_0}^t \overline{\mathcal{H}}_{1I}(\tau) d\tau}\right) \end{aligned}$$

donde $\overline{\mathcal{H}}_{1I}$ es “el término de interacción del hamiltoniano en el picture de interacción”, es decir recordemos que $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}_0 + \overline{\mathcal{H}}_1$ en el picture de Schrödinger por lo tanto $\overline{\mathcal{H}}_{1I} = e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} \overline{\mathcal{H}}_1 e^{-i\overline{\mathcal{H}}_0 t}$.

El operador de scattering se define como $\overline{S} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{U_{+\infty \leftarrow -\infty}}'$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n T\left(\overline{\mathcal{H}}_{1I}(t_1), \overline{\mathcal{H}}_{1I}(t_2), \dots, \overline{\mathcal{H}}_{1I}(t_n)\right) \leftarrow \text{Hamiltonianos} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 \dots \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_n T\left(\overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_1), \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_2), \dots, \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_n)\right) \leftarrow \text{Densidades hamiltonianas} \\ &= T\left(e^{-i \int \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x) d^4x}\right) \end{aligned}$$

Perdón por la notación mezclada para los hamiltonianos y las densidades hamiltonianas, me avivé tarde... Resulta que es usual la siguiente notación

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 \dots \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_n T\left(\overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_1), \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_2), \dots, \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_n)\right) \\ &= \overline{\mathbb{1}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 \dots \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_n T\left(\overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_1), \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_2), \dots, \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_n)\right)}_{\overline{\mathbb{T}}} \\ &= \overline{\mathbb{1}} + \overline{\mathbb{T}} \leftarrow \text{Es sólo notación} \end{aligned}$$

es decir que $\overline{\mathbb{T}}$ es son todos los términos perturbativos.

De acuerdo a lo que se expuso al principio de esta sección de teoría se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\text{inicial}\rangle \rightarrow |\text{final}\rangle) &= |\langle \text{final}_I | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial}_I \rangle|^2 \\ &= |\langle \text{final}_I | (\overline{\mathbb{1}} + \overline{\mathbb{T}}) | \text{inicial}_I \rangle|^2 \\ &= |\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle + \langle \text{final}_I | \overline{\mathbb{T}} | \text{inicial}_I \rangle|^2 \end{aligned}$$

PREGUNTA: acá los $|\rangle$ son en el picture de interacción? El término con $n = 1$ de la amplitud con $\overline{\mathbb{T}}$ es

$$\begin{aligned} \langle \text{final}_I | \overline{\mathbb{T}}_1 | \text{inicial}_I \rangle &= -i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \langle \text{final}_I | T \left(\overline{\mathcal{H}_{1I}(x)} \right) | \text{inicial}_I \rangle \\ &= -i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \langle \text{final} | T \left(\overline{\mathcal{H}_1(x)} \right) | \text{inicial} \rangle \end{aligned}$$

Asumo que $\overline{\mathcal{L}_1}$ no tiene derivadas $\Rightarrow \overline{\mathcal{H}_1} = -\overline{\mathcal{L}_1} \rightarrow = i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \langle \text{final} | T \left(\overline{\mathcal{L}_1} \right) | \text{inicial} \rangle$

PREGUNTA: en el paso indicado en rojo me hice el gil y “taché” el picture de interacción. Pero esto no sé si es correcto pues los $|\rangle$ están evaluados en $t \rightarrow \pm\infty$ mientras que $\overline{\mathcal{H}_{1I}}$ está evaluado en el tiempo de la integra... Cómo es la onda? La aplicación del teorema de Wick hará que esta última expresión se convierta en todos los diagramas de Feynman de orden 1 (es decir, con un vértice) (creo, de esto no estoy seguro aún).

El término con $n = 2$ de la amplitud con $\overline{\mathbb{T}}$ es

$$\langle \text{final}_I | \overline{\mathbb{T}}_2 | \text{inicial}_I \rangle = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 \langle \text{final}_I | T \left(\overline{\mathcal{H}_{1I}(x_1)}, \overline{\mathcal{H}_{1I}(x_2)} \right) | \text{inicial}_I \rangle$$

¿Cómo se hace acá para deshacerse de los “picture de interacción”?

Box 17 - Teorema de Wick

$$T \left(\overline{\phi(x_1)}, \overline{\phi(x_2)}, \dots, \overline{\phi(x_n)} \right) = \overline{\phi(x_1)}, \overline{\phi(x_2)}, \dots, \overline{\phi(x_n)} : + \sum : \text{todas las posibles contracciones} :$$

donde la contracción entre dos campos se define según^a

$$\overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left[\overline{\phi^+(x)}, \overline{\phi^-(y)} \right] & \text{para } x^0 > y^0 \\ \left[\overline{\phi^+(y)}, \overline{\phi^-(x)} \right] & \text{para } x^0 < y^0 \end{cases}$$

y cuando los campos no son adyacentes [5]

$$: \overline{\phi_1}, \overline{\phi_2}, \overline{\phi_3}, \overline{\phi_4} : \equiv \left(\left[\overline{\phi_1^+}, \overline{\phi_3^-} \right] \Theta_H(t_1 - t_3) + \left[\overline{\phi_3^+}, \overline{\phi_1^-} \right] \Theta_H(t_3 - t_1) \right) : \overline{\phi_2}, \overline{\phi_4} :$$

donde $\overline{\phi_i} \equiv \overline{\phi(x_i)}$ y $t_i \equiv (x_i)^0$.

Ejemplo [5, eq. (4.39)]

$$\begin{aligned} T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} &= N \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \\ &\quad + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \\ &\quad + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \}. \end{aligned}$$

^aLas contracciones yo las anoto con colores pues no sé cómo implementar la notación estándar en forma sencilla en Latex. Por ejemplo así: $\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5 \phi_6$.

Problema 1

Ítem a

El lagrangiano con el término añadido es

$$\overline{\mathcal{L}} = \partial_\mu \overline{\phi} \partial^\mu \overline{\phi} - m^2 \overline{\phi}^2 - \lambda \overline{\phi}^4$$

Para calcular la ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) sigo los pasos de siempre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \overline{\phi})} &= \frac{\partial (\partial_\alpha \overline{\phi} \partial^\alpha \overline{\phi})}{\partial (\partial_\mu \overline{\phi})} \\ &= \underbrace{\frac{\partial (\partial_\alpha \overline{\phi})}{\partial (\partial_\mu \overline{\phi})}}_{\delta^\alpha_\mu} \partial^\alpha \overline{\phi} + \partial_\alpha \overline{\phi} \underbrace{\frac{\partial (\partial^\alpha \overline{\phi})}{\partial (\partial_\mu \overline{\phi})}}_{\eta^{\alpha\beta} \delta^\beta_\mu} \\ &= 2\partial^\mu \overline{\phi} \end{aligned}$$

luego

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \overline{\phi})} \right) = 2\partial_\mu \partial^\mu \overline{\phi}$$

y el otro término de Euler-Lagrange es

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \overline{\phi}} = -\frac{m^2}{2} \overline{\phi} - \frac{\lambda}{4} \overline{\phi}^3$$

por lo tanto la ecuación de movimiento finalmente es

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \overline{\phi} + \frac{\lambda}{2} \overline{\phi}^3 = 0$$

Efectivamente es no lineal en $\overline{\phi}$.

Ítem b

La condición es sencillamente que el campo ϕ sea lo suficientemente pequeño (o pinchado) tal que

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi \gg \frac{\lambda}{2} \phi^3$$

Si $\phi \rightarrow 0$ y/o $\square^2 \phi$ es muy grande, esto ya se satisface.

Problema 6 (falta lo de campo complejo)

Campo real Las reglas de Feynman para el cálculo de los elementos $\langle \text{final} | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial} \rangle$ en la teoría $\lambda \phi^4$ con $\phi \in \mathbb{R}$ son las que se enuncian en el box 27.

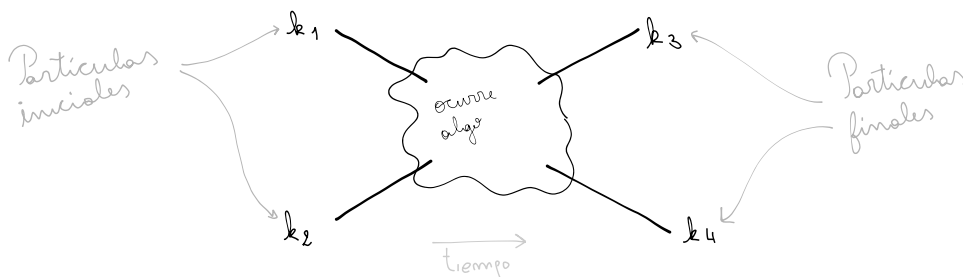
Campo complejo ??

Problema 7

Antes de comenzar a dibujar nótese que se tienen estados iniciales y finales de dos partículas, es decir

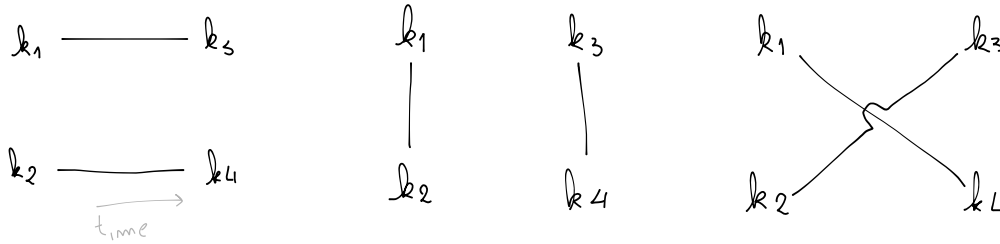
$$\begin{cases} |\text{inicial}\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle \\ |\text{final}\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_3}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_4}}^\dagger |0\rangle \end{cases}$$

lo cual implica que todos los diagramas serán de la forma



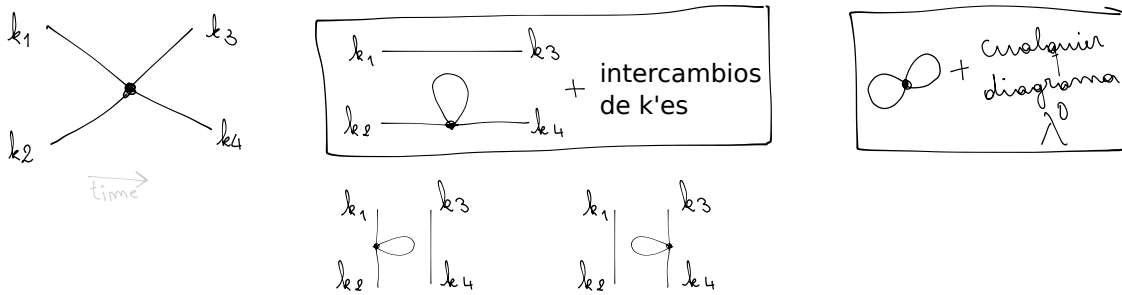
Donde dice “ocurre algo” es donde se colocan los diagramas de Feynman. El orden de los diagramas es equivalente al número de vértices que éstos tienen.

Diagramas a orden λ^0 Son diagramas sin vértices, y son los siguientes:

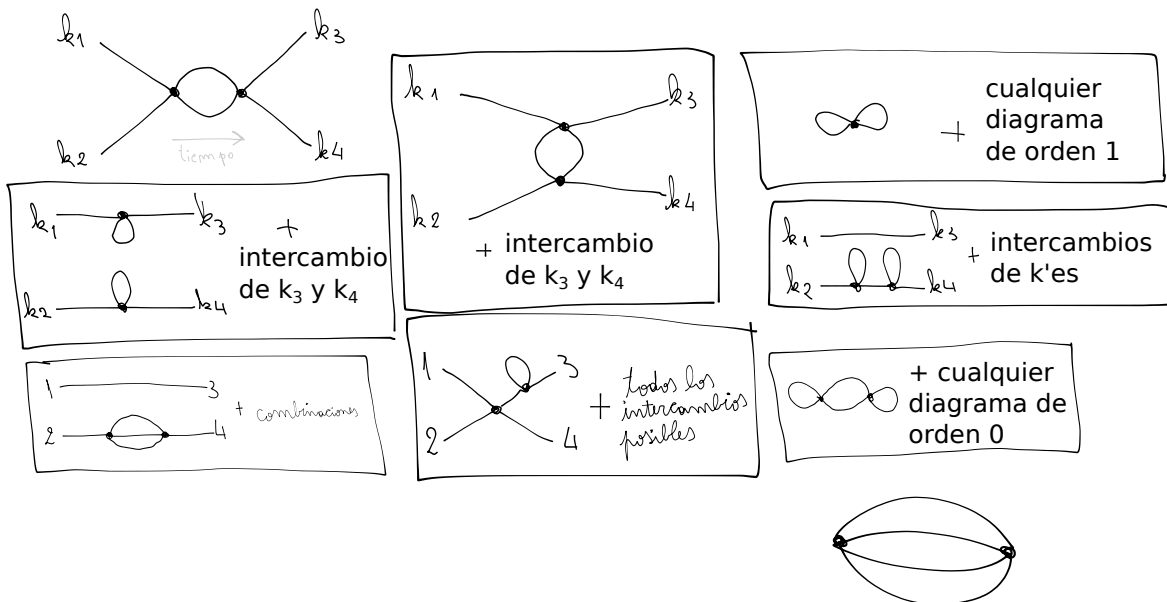


PREGUNTA: ¿El del medio está bien? No hay conexión entre las partículas iniciales y las finales... ¿Qué representa?

Diagramas a orden λ^1 Son los diagramas con un único vértice:



Diagramas a orden λ^2 Tienen dos vértices:



Ítem a

Los diagramas desconexos o burbujas son los diagramas que no tienen patas externas. En los diagramas previos no hay ninguno que sea exclusivamente una burbuja ya que todos los diagramas dibujados tienen cuatro patas externas, dos partículas iniciales y dos finales.

Ítem b (ni idea, preguntar!)

No tengo idea qué es un “diagrama radiativo”...

Ítem c (falta ítem b)

Problema 8 (PREGUNTA)

Solución sin diagramas de Feynman

Este problema (o algo similar) está resuelto en la página 261 de [6].

Los estados inicial y final son

$$\begin{cases} |\text{inicial}\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle & \text{En } t \rightarrow -\infty \\ |\text{final}\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_3}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_4}}^\dagger |0\rangle & \text{En } t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

y lo que se quiere encontrar es

$$\mathbb{P}(|\text{inicial}\rangle \rightarrow |\text{final}\rangle) = |\langle \text{final} | \overline{S} | \text{inicial} \rangle|^2$$

donde esta amplitud es, a primer orden,

$$\begin{aligned} \langle \text{final} | \overline{S} | \text{inicial} \rangle &\approx \langle \text{final} | \text{inicial} \rangle - i\lambda \int \langle \text{final} | T(\overline{\phi}^4) | \text{inicial} \rangle d^4x + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) - i\lambda \int \langle \text{final} | T(\overline{\phi}^4) | \text{inicial} \rangle d^4x + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

El término de orden λ es

$$\begin{aligned} \int \langle \text{final} | T(\overline{\phi}^4) | \text{inicial} \rangle d^4x &= \int \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T(\overline{\phi(x)}^4) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle d^4x \\ &= \int \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} : \overline{\phi(x)}^4 : \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle d^4x \end{aligned}$$

Para continuar la operación se separa a $\overline{\phi(x)} = \overline{\phi^+(x)} + \overline{\phi^-(x)}$ y utilizando el **binomio de Newton** esto es

$$\begin{aligned} \int \langle \text{final} | : \overline{\phi}^4 : | \text{inicial} \rangle d^4x &= \int \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} \left(\binom{4}{0} \overline{\phi^-}^4 + \binom{4}{1} \overline{\phi^-} \overline{\phi^+}^3 + \binom{4}{2} \overline{\phi^-}^2 \overline{\phi^+}^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \binom{4}{3} \overline{\phi^-}^3 \overline{\phi^+} + \binom{4}{4} \overline{\phi^-}^4 \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle d^4x \end{aligned}$$

No olvidar orden normal!

Obsérvese ahora que

$$\begin{aligned} \overline{\phi^-}^n \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle &\sim \left(\prod_{i=1}^n \overline{a_{\mathbf{q}_i}} \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle \leftarrow \text{Las variables } \mathbf{q}_i \text{ se integran en } \int_{\mathbb{R}^3} d^3q_i \\ [\overline{a_{\mathbf{k}}}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}^\dagger] = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') &\rightarrow = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{a_{\mathbf{q}_i}} \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \underbrace{\overline{a_{\mathbf{q}_n}} \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger}_{\text{conmuta estos dos}} |0\rangle + \left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{a_{\mathbf{q}_i}} \right) \underbrace{\delta_D(\mathbf{q}_n - \mathbf{k}_1)}_{\int d^3q_n \sim 1} \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle \\ \text{De nuevo } \rightarrow &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{a_{\mathbf{q}_i}} \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{q}_n}} |0\rangle + \left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{a_{\mathbf{q}_i}} \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \underbrace{\delta_D(\mathbf{q}_n - \mathbf{k}_2)}_{\int d^3q_n \sim 1} |0\rangle + \dots \\ &\quad \dots + \left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{a_{\mathbf{q}_i}} \right) \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle \\ &\quad \vdots \quad \text{Hay que seguir conmutando... Pero ya se anticipa el resultado} \\ &= 0 \text{ para } n > 2 \end{aligned}$$

y de igual modo $\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} \overline{\phi^-}^n = 0$ para $n \geq 2$. Creo que esto se puede generalizar a

$$\overline{\phi^+(x)}^n \left(\prod_{i=1}^m \overline{a_{\mathbf{k}_i}}^\dagger \right) |0\rangle = 0 \text{ para } n > m$$

Entonces

$$\int \langle \text{final} | T(\overline{\phi}^4) | \text{inicial} \rangle d^4x = \binom{4}{2} \int \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} \overline{\phi^-}^2 \overline{\phi^+}^2 \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle d^4x$$

Ahora la cuenta sigue por “fuerza bruta”. Hay que reemplazar

$$\begin{cases} \overline{\phi^+}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}x} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ \overline{\phi^-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \end{cases}$$

y ponerse a calcular. Esto es

$$\int \langle \text{final} | T (: \overline{\phi}^4 :) | \text{inicial} \rangle d^4x = \frac{6}{[(2\pi)^{3/2}]^4} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3}^{\times 4} \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle e^{-i\mathbf{1}x} e^{-i\mathbf{2}x} \dots \\ \dots e^{i\mathbf{3}x} e^{i\mathbf{4}x} \frac{d^3\mathbf{1}}{\sqrt{\omega_1}} \frac{d^3\mathbf{2}}{\sqrt{\omega_2}} \frac{d^3\mathbf{3}}{\sqrt{\omega_3}} \frac{d^3\mathbf{4}}{\sqrt{\omega_4}} d^4x$$

donde las variables $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots$ son vectores \mathbf{q}_1, \dots . Ahora hay que empezar a conmutar todos los operadores usando $[\overline{a_{\mathbf{k}}}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}^\dagger] = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ para obtener términos con deltas de Dirac y usar $\overline{a} | 0 \rangle = 0$ para anular muchos de los términos restantes. Es una cuenta de varias carillas que no es más que conmutar a morir todo contra todo. Se termina llegando a [6, p. 263]

$$\begin{aligned} \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle &= (\delta_D^3(\mathbf{1} - \mathbf{k}_3) \delta_D^3(\mathbf{2} - \mathbf{k}_4) + \delta_D^3(\mathbf{1} - \mathbf{k}_4) \delta_D^3(\mathbf{2} - \mathbf{k}_3)) \dots \\ &\dots (\delta_D^3(\mathbf{3} - \mathbf{k}_2) \delta_D^3(\mathbf{4} - \mathbf{k}_1) + \delta_D^3(\mathbf{3} - \mathbf{k}_1) \delta_D^3(\mathbf{4} - \mathbf{k}_2)) \\ &= \delta_D^3(\mathbf{1} - \mathbf{k}_3) \delta_D^3(\mathbf{2} - \mathbf{k}_4) \delta_D^3(\mathbf{3} - \mathbf{k}_2) \delta_D^3(\mathbf{4} - \mathbf{k}_1) + \dots \\ &\dots + \delta_D^3(\mathbf{1} - \mathbf{k}_4) \delta_D^3(\mathbf{2} - \mathbf{k}_3) \delta_D^3(\mathbf{3} - \mathbf{k}_2) \delta_D^3(\mathbf{4} - \mathbf{k}_1) + \dots \\ &\dots + \delta_D^3(\mathbf{1} - \mathbf{k}_3) \delta_D^3(\mathbf{2} - \mathbf{k}_4) \delta_D^3(\mathbf{3} - \mathbf{k}_1) \delta_D^3(\mathbf{4} - \mathbf{k}_2) + \dots \\ &\dots + \delta_D^3(\mathbf{1} - \mathbf{k}_4) \delta_D^3(\mathbf{2} - \mathbf{k}_3) \delta_D^3(\mathbf{3} - \mathbf{k}_1) \delta_D^3(\mathbf{4} - \mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

Ahora se pueden realizar todas las integrales en las variables $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots$ con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \int \langle \text{final} | T (: \overline{\phi}^4 :) | \text{inicial} \rangle d^4x &= \frac{6}{[(2\pi)^{3/2}]^4} \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{e^{i(k_2+k_1-k_3-k_4)x}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3}\omega_{\mathbf{k}_4}}} + \frac{e^{i(k_2+k_1-k_4-k_3)x}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3}\omega_{\mathbf{k}_4}}} + \dots \right. \\ &\dots + \left. \frac{e^{i(k_1+k_2-k_3-k_4)x}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3}\omega_{\mathbf{k}_4}}} + \frac{e^{i(k_1+k_2-k_4-k_3)x}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3}\omega_{\mathbf{k}_4}}} \right) d^4x \\ &= \frac{24(2\pi)^4}{[(2\pi)^{3/2}]^4 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3}\omega_{\mathbf{k}_4}}} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{i(k_1+k_2-k_3-k_4)x}}{(2\pi)^4} d^4x \\ \delta_D^4(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{(2\pi)^4} d^4k &\rightarrow = \frac{24}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3}\omega_{\mathbf{k}_4}}} \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \end{aligned}$$

Introduciendo esto en la expresión para $\langle \text{final} | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial} \rangle$ de antes se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} \langle \text{final} | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial} \rangle &\approx \langle \text{final} | \text{inicial} \rangle - i\lambda \int \langle \text{final} | T (: \overline{\phi}^4 :) | \text{inicial} \rangle d^4x + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \left(1 - \frac{24}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\lambda}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3}\omega_{\mathbf{k}_4}}} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

Término de orden λ^2 Utilizando la expresión más general $\overline{\mathcal{S}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 \dots \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_n T (: \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_1) :, : \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_n) :)$ se obtiene que el término con λ^2 es

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}^{(2)}} &= \frac{(-i)^2}{2!} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} T (: \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x) :, : \overline{\mathcal{H}}_{1I}(y) :) d^4x d^4y \\ &= \lambda^2 \frac{(-i)^2}{2!} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} T (: \overline{\phi}(x)^4 :, : \overline{\phi}(y)^4 :) d^4x d^4y \end{aligned}$$

por lo tanto los elementos de matriz serán

$$\langle \text{final} | \overline{S^{(2)}} | \text{inicio} \rangle = \lambda^2 \frac{(-i)^2}{2!} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left(: \overline{\phi(x)}^4 : , : \overline{\phi(y)}^4 : \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle d^4x d^4y$$

A continuación se hace uso del teorema de Wick para desarrollar $T \left(: \overline{\phi(x)}^4 : , : \overline{\phi(y)}^4 : \right)$ según

$$T \left(: \overline{\phi(x)}^4 : , : \overline{\phi(y)}^4 : \right) = : \overline{\phi(x)}^4 \overline{\phi(y)}^4 : + \sum : \text{todas las posibles contracciones} : \leftarrow \text{Wick}$$

Para encontrar todas las posibles contracciones considérese en forma explícita

$$: \overline{\phi(x)}^4 \overline{\phi(y)}^4 : = : \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{y} \overline{y} \overline{y} \overline{y} : \leftarrow \begin{cases} \overline{x} \equiv \overline{\phi(x)} \\ \overline{y} \equiv \overline{\phi(y)} \end{cases}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \sum : \text{contracciones} : &= 4 \cdot 3 \overline{x} \overline{x} : \overline{x} \overline{x} \overline{y} \overline{y} \overline{y} \overline{y} : + 4 \cdot 3 \overline{y} \overline{y} : \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{y} \overline{y} : + 4^2 \overline{x} \overline{y} : \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{y} \overline{y} \overline{y} : + \dots \\ &\dots + 4! \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} : \overline{y} \overline{y} \overline{y} \overline{y} : + 4! \overline{y} \overline{y} \overline{y} \overline{y} : \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} : + 4^2 \cdot 3^2 \overline{x} \overline{y} \overline{x} \overline{y} : \overline{x} \overline{x} \overline{y} \overline{y} : + \dots \\ &\dots + 4! \cdot 4 \cdot 3 \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{y} \overline{y} : \overline{y} \overline{y} : + \text{otros términos} \end{aligned}$$

PREGUNTA: A Grenier (pag. 263) lo anterior le da

$$T(:\hat{\phi}^4(x_1): : \hat{\phi}^4(x_2):) = : \hat{\phi}^4(x_1) \hat{\phi}^4(x_2) : \tag{11a}$$

$$+ 4^2 \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) : \hat{\phi}^3(x_1) \hat{\phi}^3(x_2) : \tag{11b}$$

$$+ \frac{4^2 \cdot 3^2}{2!} (\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2))^2 : \hat{\phi}^2(x_1) \hat{\phi}^2(x_2) : \tag{11c}$$

$$+ \frac{4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{3!} (\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2))^3 : \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) : \tag{11d}$$

$$+ \frac{4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{4!} (\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2))^4 . \tag{11e}$$

Qué pasó con los términos no cruzados como $\overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} : \overline{y} \overline{y} \overline{y} \overline{y} :$, $\overline{y} \overline{y} \overline{y} \overline{y} : \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} :$ y $\overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{x} \overline{y} \overline{y} : \overline{y} \overline{y} : \text{?????}$
Desconozco cómo pero parece que el teorema de Wick termina aplicándose así:

$$\begin{aligned} T \left(: \overline{\phi(x)}^4 : , : \overline{\phi(y)}^4 : \right) &= : \overline{x}^4 \overline{y}^4 : + \dots \\ &\dots + \frac{4^2}{1!} \overline{x} \overline{y} : \overline{x}^3 \overline{y}^3 : + \dots \\ &\dots + \frac{4^2 \cdot 3^2}{2!} (\overline{x} \overline{y})^2 : \overline{x}^2 \overline{y}^2 : + \dots \\ &\dots + \frac{4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{3!} (\overline{x} \overline{y})^3 : \overline{x} \overline{y} : + \dots \\ &\dots + \frac{4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{4!} (\overline{x} \overline{y})^4 \\ &= \sum_{n=0}^4 \frac{1}{(4-n)!} \left(\prod_{k=n+1}^4 k^2 \right) (\overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)})^{4-n} : \overline{\phi(x)}^n \overline{\phi(y)}^n : \end{aligned}$$

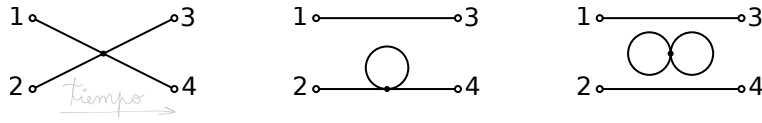
(lo anterior lo saqué de [6, p. 263]). Entonces

$$\begin{aligned} \langle \text{final} | \overline{S^{(2)}} | \text{inicio} \rangle &= \lambda^2 \frac{(-i)^2}{2!} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left(: \overline{\phi(x)}^4 : , : \overline{\phi(y)}^4 : \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle d^4x d^4y \\ &= \lambda^2 \frac{(-i)^2}{2!} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \left[\sum_{n=0}^4 \frac{1}{(4-n)!} \left(\prod_{k=n+1}^4 k^2 \right) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} (\overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)})^{4-n} : \overline{\phi(x)}^n \overline{\phi(y)}^n : \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle \right] d^4x d^4y \end{aligned}$$

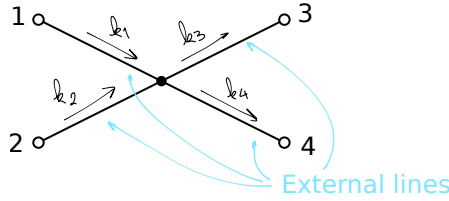
El paso que sigue es imposible, ya fue... Dios quiera que no tomen términos $\sim \lambda^2$ en el parcial.

Solución con diagramas de Feynman

Debido a que $\overline{\mathcal{L}}_1 \sim \overline{\phi}^4$ entonces los nodos en los diagramas de Feynman tendrán cuatro patas. Diagramas con un único nodo son los siguientes:



más todas las “rotaciones”. Ahora usamos el argumento ese de “los términos no conexos se cancelan al normalizar” y entonces tiramos todos salvo el diagrama en cruz. Debido a que el intercambio de partículas (iniciales con iniciales y finales con finales) no cambia el diagrama, el factor de peso es 1. El diagrama completo es



Para este diagrama las reglas de Feynman (ver box 27) dicen que el término asociado es

$$(-i\lambda) \delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \frac{1}{\left[(2\pi)^{3/2} \right]^4 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_3} \omega_{\mathbf{k}_4}}} \left[(2\pi)^4 \right]^{1-0}$$

por lo tanto la matriz de scattering hasta primer orden es

$$\begin{aligned} \langle \text{final} | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial} \rangle &= (\text{orden } 0) + (\text{orden } 1) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \underbrace{\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle}_{\delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)} + (\text{diagrama}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \left(1 - \frac{i\lambda}{(2\pi)^2 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_3} \omega_{\mathbf{k}_4}}} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

Obsérvese que quedó lo mismo que en el cálculo sin diagramas a menos de una constante (no sé por qué difiere en esta constante).

Problema 10

Pueden encontrarse en [6, p. 241].

Problema 11

Ítem b (scattering de Moller) (reglas de Feynman para QED paso a paso)

El scattering de Moller es

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^- \leftarrow \text{Scattering de Moller}$$

por lo tanto los estados inicial y final son

$$\begin{cases} |\text{inicial}\rangle = \overline{b_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle \\ |\text{final}\rangle = \overline{b_{\mathbf{k}_3}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}_4}}^\dagger |0\rangle \end{cases}$$

Debido a que el lagrangiano de interacción en QED es

$$\overline{\mathcal{L}}_{\text{interacción QED}} \propto \overline{\psi} \not{A} \psi$$

y es $\propto \psi^2$ y $\propto A^1$ entonces cada vértice tiene tres patas: dos patas correspondientes al campo de Dirac (electrones y/o positrones) y una pata correspondiente al campo electromagnético (fotón). En particular los “vértices permitidos” en QED son los siguientes [6, fig. 8.3]

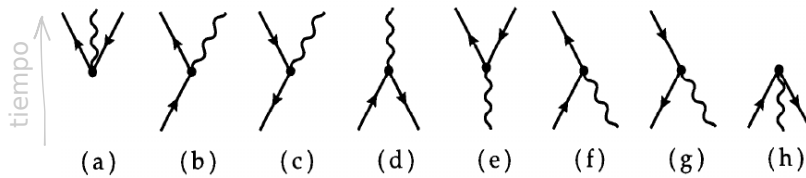


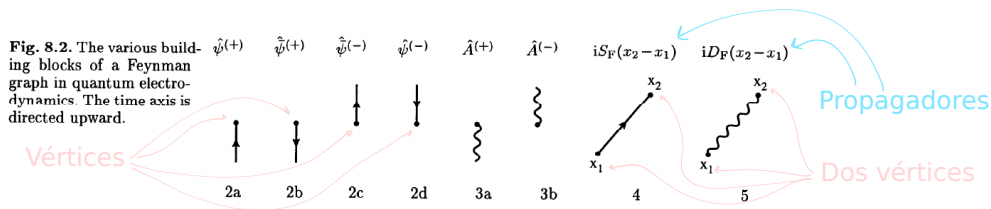
Fig. 8.3. Graphical representation of all first-order contributions to the \hat{S} operator (8.91)

- (a) Spontaneous creation of an electron-positron pair together with a photon,
- (b) Emission of a photon by an electron,
- (c) Emission of a photon by a positron,
- (d) Annihilation of a pair producing a photon,
- (e) Creation of a pair by a photon,
- (f) Absorption of a photon by an electron,
- (g) Absorption of a photon by a positron,
- (h) Annihilation of a pair together with a photon.

Obsérvese que todos los nodos deben tener ni más ni menos que:

1. Una pata A (fotón).
2. Una pata ψ entrante.
3. Una pata ψ saliente.

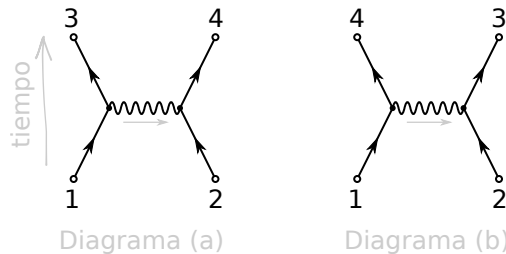
Los diagramas de Feynman de QED se construyen utilizando los siguientes objetos [6, fig. 8.2]



No es difícil ver que con un único nodo es imposible construir el proceso por lo tanto el término $\sim q_e^1$ es nulo. Con dos nodos sí existe una forma de implementar el proceso que es la siguiente



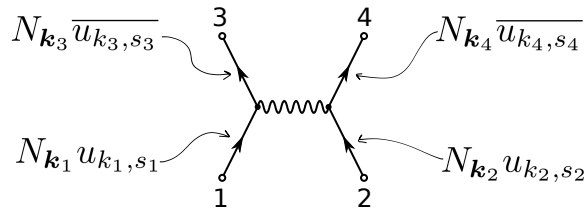
por lo tanto el orden más bajo para este proceso es $\sim q_e^2$. Éste diagrama tiene una “multiplicidad” o “factor de simetría” o como se llame de 2 porque existen dos diagramas “iguales pero distintos” que son los siguientes:



(la flecha gris en la línea fotónica indica la convención de flujo de momento que adoptaré para los propagadores). Son iguales en el sentido de que ambos representan el scattering de Moller, y son distintos en el sentido de que uno no se puede obtener realizando únicamente rotaciones del otro.

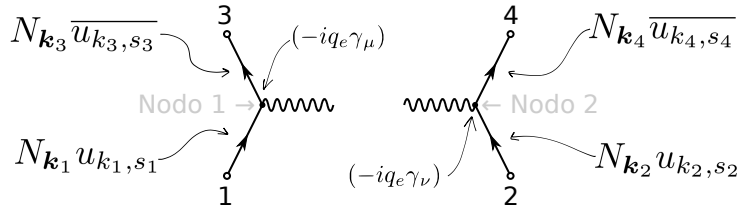
Construcción del término asociado al diagrama (a) De acuerdo con las reglas de Feynman para QED para el espacio de momentos [6, p. 242] (ver box 28) se puede construir la expresión matemática asociada a cada uno de los diagramas, paso a paso para el diagrama (a) esto es así

1. Asociar a cada pata externa el término correspondiente del siguiente modo



donde los N son los factores de normalización del box 28.

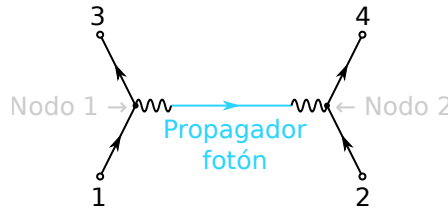
2. “Conectar” cada “pata externa inicial” con cada “pata externa final” usando la expresión para los nodos:



Matemáticamente esto es

$$\begin{aligned} \text{Nodo 1} &\rightarrow N_{k_1} N_{k_3} \overline{u}_{k_3, s_3} (-iq_e \gamma_\mu) u_{k_1, s_1} \\ \text{Nodo 2} &\rightarrow N_{k_2} N_{k_4} \overline{u}_{k_4, s_4} (-iq_e \gamma_\nu) u_{k_2, s_2} \end{aligned}$$

3. “Enganchar” cada término usando el propagador del campo que los une, en este caso fotón, respetando la convención adoptada para el flujo de momento:



$$\text{Propagador} \rightarrow iD^{\mu\nu} (p_{\text{propagador}}) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{(k_1 - k_3)^2 + i\epsilon}$$

lo cual se traduce en

$$N_{k_1} N_{k_2} N_{k_3} N_{k_4} \overline{u}_{k_3, s_3} (-iq_e \gamma_\mu) u_{k_1, s_1} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(k_1 - k_3)^2} \overline{u}_{k_4, s_4} (-iq_e \gamma_\nu) u_{k_2, s_2}$$

4. Imponer conservación global de momento multiplicando por $\delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$.

Reemplazando los factores de normalización N por la expresión dada en el box 28 finalmente se obtiene que la expresión asociada al diagrama (a) es

$$\text{Diagrama (a)} \rightarrow A \stackrel{\text{def}}{=} -q_e^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3} \omega_{k_4}}} \overline{u}_{k_3, s_3} \gamma_\mu u_{k_1, s_1} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(k_1 - k_3)^2} \overline{u}_{k_4, s_4} \gamma_\nu u_{k_2, s_2} \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$$

Análogamente para el diagrama (b) es

$$\text{Diagrama (b)} \rightarrow B \stackrel{\text{def}}{=} +q_e^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3} \omega_{k_4}}} \overline{u}_{k_3, s_3} \gamma_\mu u_{k_2, s_2} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(k_1 - k_4)^2} \overline{u}_{k_4, s_4} \gamma_\nu u_{k_1, s_1} \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$$

sólo que se multiplica por (-1) por el hecho de que se han intercambiado dos fermiones.

Finalmente la amplitud de probabilidad para el scattering de Moller es la suma de los términos hallados:

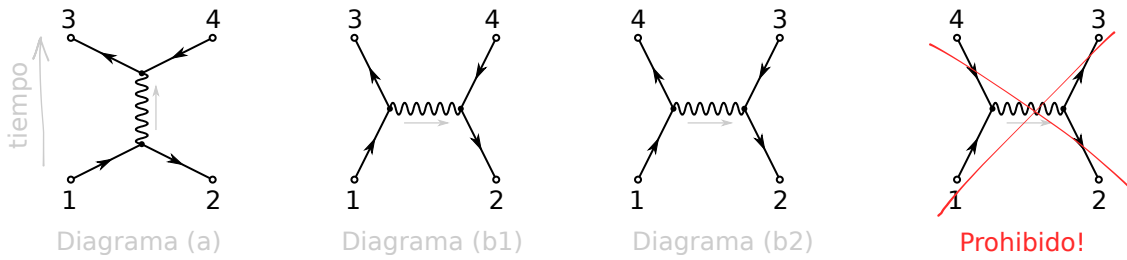
$$\langle \text{final con } \mathbf{k}_3, s_3, \mathbf{k}_4, s_4 | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial con } \mathbf{k}_1, s_1, \mathbf{k}_2, s_2 \rangle = A + B$$

Ítem a (scattering de Bhabha) (averiguar si está bien + duda)

El scattering de Bhabha es

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$$

Siguiendo todo lo enunciado en el ítem previo (scattering de Moller) los diagramas de segundo orden son



PREGUNTA: El “3” es el electrón final y el “4” el positrón final en (a) y en (b1). Por qué se puede armar el (b2)? O sea, convertí un electrón en un positrón y viceversa... Según Greiner está bien, o eso le entendí...

Obsérvese que hay dos diagramas (a) y (b) y que el (b) tiene “dos variantes” producto de que (b1) y (b2) son topológicamente distintos. En el caso de (a) no hay ninguna variante posible. Obsérvese además que existe un diagrama “prohibido” (en verdad hay más de uno) por el hecho de que no se forma con ninguno de los “bloques fundamentales de QED” presentados en [6, fig. 8.2] (unos párrafos más arriba copié la imagen).

Utilizando las reglas de Feynman los términos asociados son

$$\begin{cases} A = N_{\mathbf{p}_3} \overline{u_{\mathbf{p}_3, s_3}} (-iq_e \gamma_\mu) N_{\mathbf{p}_4} v_{\mathbf{p}_4, s_4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} N_{\mathbf{p}_1} \overline{v_{\mathbf{p}_2, s_2}} (-iq_e \gamma_\nu) N_{\mathbf{p}_1} u_{\mathbf{p}_1, s_1} \\ B_1 = N_{\mathbf{p}_3} \overline{u_{\mathbf{p}_3, s_3}} (-iq_e \gamma_\mu) N_{\mathbf{p}_4} v_{\mathbf{p}_4, s_4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} N_{\mathbf{p}_2} \overline{v_{\mathbf{p}_2, s_2}} (-iq_e \gamma_\nu) N_{\mathbf{p}_1} u_{\mathbf{p}_1, s_1} \\ B_2 = N_{\mathbf{p}_2} \overline{v_{\mathbf{p}_2, s_2}} (-iq_e \gamma_\mu) N_{\mathbf{p}_3} v_{\mathbf{p}_3, s_3} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} N_{\mathbf{p}_4} \overline{u_{\mathbf{p}_4, s_4}} (-iq_e \gamma_\nu) N_{\mathbf{p}_1} u_{\mathbf{p}_1, s_1} \end{cases}$$

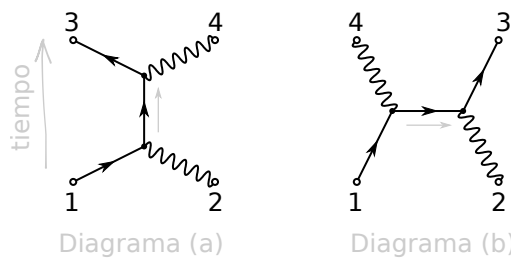
La amplitud de probabilidad es la suma de los tres términos.

Ítem e (scattering de Compton)

El scattering de Compton es

$$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$$

y los únicos diagramas posibles son



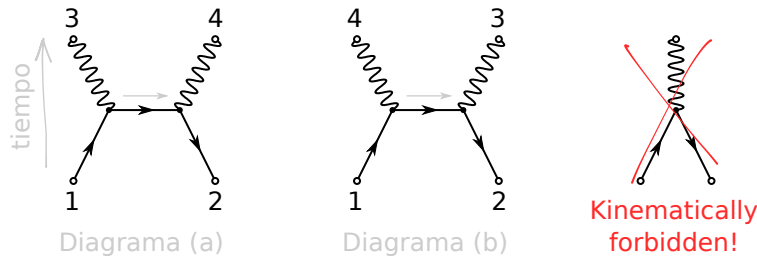
y los términos asociados a cada uno de los diagramas de acuerdo con las reglas de Feynman son

$$\begin{cases} \text{Diagrama (a)} \rightarrow N_{\mathbf{p}_3} \overline{u_{\mathbf{p}_3, s_3}} (-iq_e \gamma_\nu) N_{\mathbf{k}_4} (\varepsilon_{\mathbf{k}_4, \lambda_4}^*)^\nu \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k}_2 - m} N_{\mathbf{k}_2} (\varepsilon_{\mathbf{k}_2, \lambda_2})^\mu (-iq_e \gamma_\mu) N_{\mathbf{p}_1} u_{\mathbf{p}_1, s_1} \\ \text{Diagrama (b)} \rightarrow N_{\mathbf{p}_3} \overline{u_{\mathbf{p}_3, s_3}} (-iq_e \gamma_\mu) N_{\mathbf{k}_2} (\varepsilon_{\mathbf{k}_2, \lambda_2})^\mu \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_4 - m} N_{\mathbf{k}_4} (\varepsilon_{\mathbf{k}_4, \lambda_4}^*)^\nu (-iq_e \gamma_\nu) N_{\mathbf{p}_1} u_{\mathbf{p}_1, s_1} \end{cases}$$

(los factores N son los del box 28). La amplitud de probabilidad para el proceso es la suma de los dos términos.

Ítem c (aniquilación de pares)

Los diagramas para la aniquilación de pares son los siguientes



El proceso prohibido es por conservación del cuadrimomento: en el sistema centro de masa el fotón debería ser puramente temporal lo cual es imposible ya que $k^\mu k_\mu = 0$ (i.e. son nulos los fotones).

Ítem d (creación de pares)

Es igual al (c) pero invirtiendo la dirección del tiempo.

Reglas de Feynman: cómo hallarlas

Sea una teoría con N campos C_i tales que los operadores asociados a cada campo son $\overline{C_i}$ (por ejemplo en QED $N = 3$ y los campos son $\overline{C_1} = \overline{\psi}$, $\overline{C_2} = \underline{\psi}$ y $\overline{C_3} = \overline{A^\mu}$). Sea el lagrangiano de dicha teoría de la siguiente forma:

$$\overline{\mathcal{L}_{\text{de la teoría}}} = \sum_{i=1}^N \overline{\mathcal{L}_{\text{campo } C_i \text{ libre}}} + \sum_{i=1}^M \overline{\mathcal{L}_{\text{interacción } i\text{-ésima}}}$$

$$\text{Ejemplo QED} \rightarrow \overline{\mathcal{L}_{\text{QED}}} = \underbrace{\overline{\overline{\psi} (i\not{\partial} - m) \underline{\psi}}}_{\sum \overline{\mathcal{L}_{\text{campo } C_i \text{ libre}}}} + \underbrace{\overline{-\frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4}}}_{\text{Maxwell}} + \underbrace{\overline{(-q_e \overline{\psi} \gamma_\mu \overline{A^\mu} \underline{\psi})}}_{M=1 \text{ para QED}}$$

Entonces las reglas de Feynman dicen que

- A cada campo C_i presente en la teoría se le asocia un tipo de línea. Por ejemplo en QED se suelen asociar las cosas de la siguiente forma:

Ejemplo para QED		
Campo	Partícula	Línea
$\overline{A^\mu}$	Fotón	~~~~~
$\underline{\psi}$	Electrón	→
$\overline{\psi}$	Positrón	←

- Cada término $\overline{\mathcal{L}_{\text{campo } C_i \text{ libre}}}$ dará origen a un propagador. En QED los propagadores que surgen son el del campo electromagnético $(D_F(k))^{\mu\nu} = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2}$ y el de Dirac $S_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{\not{p} - m}$.
- Cada término $\overline{\mathcal{L}_{\text{interacción } i\text{-ésima}}}$ da origen a un vértice, es decir que habrán M vértices distintos. Un término de interacción siempre es una productoria de los diversos campos de la teoría, sus derivadas, y además otros factores constantes. Es decir que podemos escribir

$$\overline{\mathcal{L}_{\text{interacción } i\text{-ésima}}} = \zeta_i \prod_{\ell=1}^N (\overline{C_\ell}^{a_{C_\ell,i}}) (\nabla \overline{C_\ell})^{b_{C_\ell,i}}$$

donde $\zeta_i \in \mathbb{C}$ es alguna constante, $a_{C_\ell,i} \in \mathbb{N}_0$ dice cuántas veces aparece el campo C_ℓ en la interacción i -ésima y $b_{C_\ell,i} \in \mathbb{N}_0$ dice cuántas veces aparece el gradiente de C_ℓ , si es que aparece. Por ejemplo en QED sólo hay una única interacción y se tiene que $\zeta = -q_e \gamma^\mu$, $a_\psi = 1$, $a_{\overline{\psi}} = 1$, $a_{A^\mu} = 1$ y $b = 0$ para todos los campos. Teniendo en cuenta que los lagrangianos de interacción son de esta forma entonces el vértice i -ésimo de la teoría se construye de acuerdo a las siguientes reglas:

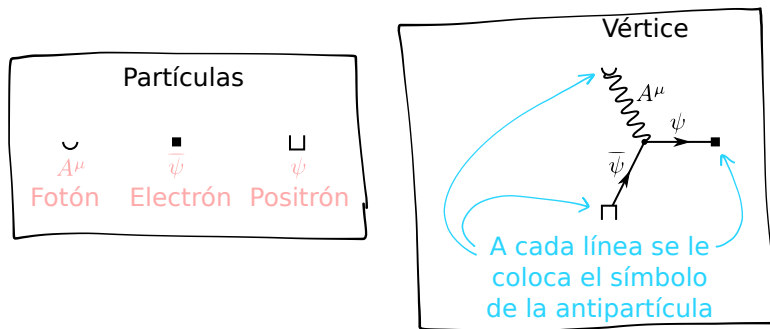
- El factor asociado al vértice es $i\zeta_i$ (no sería $(2\pi)^4 i\zeta_i$?).
- El vértice tendrá $a_{C_\ell,i} + b_{C_\ell,i}$ patas con el tipo de línea asociado al campo C_ℓ .
- A $b_{C_\ell,i}$ de las patas anteriores se les asocia el cuadrimomento del campo C_ℓ (en esta materia los b son siempre nulos, salvo en el último problema de la guía 5A, así que no hay que preocuparse mucho de esto. El ayudante me dijo que no lo veíamos en profundidad en esta materia este tema así que no es de gran importancia.)

Construcción de diagramas de Feynman para dummies

Los diagramas de Feynman se pueden pensar como un juego de LEGO si se aplican las siguientes reglas:

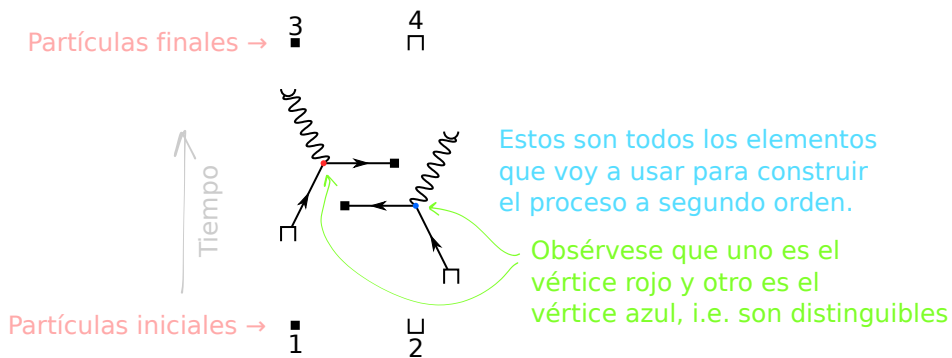
1. A cada tipo de partícula/campo asignarle un símbolo para encastrar con otro símbolo según:
 - a) Si la partícula es igual a la antipartícula (e.g. Maxwell) el símbolo debe ser tal que encastre en sí mismo.
 - b) Si la partícula y la antipartícula son distintas entonces el símbolo de la partícula debe encastrar en el de la antipartícula.
 - c) A las líneas de asociadas a cada campo colocarles el símbolo de la antipartícula.
 - d) Encastrar las cosas y divertirse como si se tratara de un LEGO.

Ejemplo QED para dummies Se asocian los siguientes simbolitos:

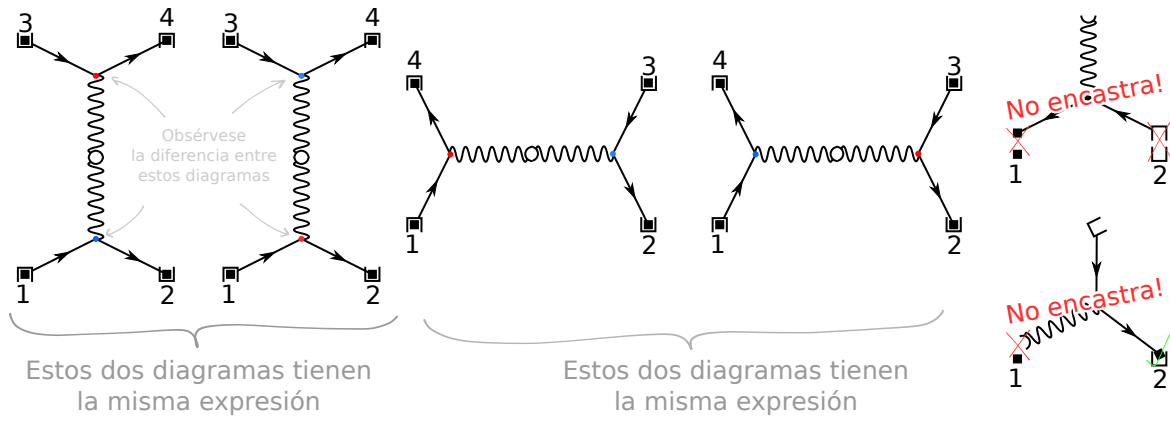


de modo tal que para construir todos los diagramas posibles para el proceso de scattering de Bahbah $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se elige a qué orden se desea representar el proceso. Voy a elegir a segundo orden con lo cual tengo que usar dos vértices.
2. Se dibujan las partículas iniciales, las finales, y los vértices a usar:

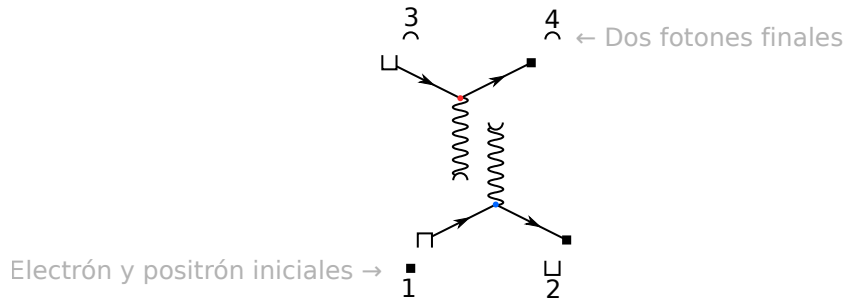


3. Como si se tratase de un juego de LEGO, se encastran todas las cosas de todas las formas posibles. En este caso “todas las formas posibles de encastrar las figuritas” son las siguientes dos:

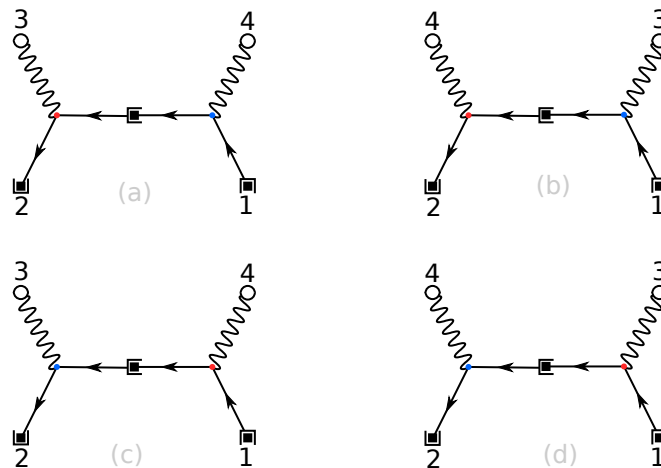


Como se puede ver se han obtenido cuatro diagramas en total, de los cuales dos son “iguales” y lo mismo para los otros dos. La expresión matemática, como indiqué en la imagen, es la misma. Sin embargo se debe multiplicar por 2 para tener en cuenta esta “multiplicidad” producto del intercambio de vértices.

Ejemplo QED para dummies 2 Considérese el proceso $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Para este proceso los elementos con los que hay que jugar a los LEGO son los siguientes:



Ahora hay que “jugar a los LEGO” y armar todos los diagramas que se puedan. Si no me equivoco éstos son los siguientes cuatro:



Obsérvese que los diagramas (a) y (c) son iguales topológicamente y los diagramas (b) y (d) también. Esto hace van a tener la misma expresión (el (a) y el (c) y por otro lado el (b) y el (d)) pero va a haber que multiplicar por dos por la “multiplicidad de intercambio de vértices”.

Problema 12 (Averiguar si está bien)

Esto es lo que en la jerga de los físicos se conoce como *scalar electrodynamics*. Asumiré que el campo ϕ es complejo.

En este lagrangiano el término de interacción está adentro de $\overline{D}_\mu \overline{\phi}^\dagger \overline{D}^\mu \overline{\phi}$. Expandiendo este término se encuentra que

$$\begin{aligned} \overline{D}_\mu \overline{\phi}^\dagger \overline{D}^\mu \overline{\phi} &= (\partial_\mu - iq_e \overline{A}_\mu) \overline{\phi}^\dagger (\partial^\mu - iq_e \overline{A}^\mu) \overline{\phi} \\ &= \partial_\mu \overline{\phi}^\dagger \partial^\mu \overline{\phi} - iq_e (\partial_\mu \overline{\phi}^\dagger \overline{A}^\mu \overline{\phi} + \overline{A}_\mu \overline{\phi}^\dagger \partial^\mu \overline{\phi}) - q_e^2 \overline{A}_\mu \overline{\phi}^\dagger \overline{A}^\mu \overline{\phi} \\ &= \underbrace{\partial_\mu \overline{\phi}^\dagger \partial^\mu \overline{\phi}}_{\text{Teoría libre}} - \underbrace{iq_e \overline{A}^\mu (\overline{\phi} \partial_\mu \overline{\phi}^\dagger + \overline{\phi}^\dagger \partial_\mu \overline{\phi})}_{\text{Interacción}} - \underbrace{q_e^2 \overline{A}_\mu \overline{A}^\mu \overline{\phi}^\dagger \overline{\phi}}_{\text{Interacción 2}} \end{aligned}$$

donde el último paso se puede hacer porque todos los campos conmutan con todos pues son tres campos independientes: 1) \overline{A} , 2) $\overline{\phi}$ y 3) $\overline{\phi}^\dagger$. El lagrangiano completo es, entonces,

$$\overline{\mathcal{L}} = \underbrace{\partial_\mu \overline{\phi}^\dagger \partial^\mu \overline{\phi} - m^2 \overline{\phi}^\dagger \overline{\phi}}_{\mathcal{L}_\phi \text{ libre}} - \underbrace{\frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4}}_{\mathcal{L}_A \text{ libre}} - \underbrace{iq_e \overline{A}^\mu (\overline{\phi} \partial_\mu \overline{\phi}^\dagger + \overline{\phi}^\dagger \partial_\mu \overline{\phi})}_{\mathcal{L}_{\text{interacción 1}}} - \underbrace{q_e^2 \overline{A}_\mu \overline{A}^\mu \overline{\phi}^\dagger \overline{\phi}}_{\mathcal{L}_{\text{interacción 2}}}$$

Como se puede ver se encontraron dos términos de interacción que son

$$\text{Términos de interacción} \rightarrow \begin{cases} \overline{\mathcal{L}}_{\text{interacción 1}} = iq_e \overline{A}^\mu (\overline{\phi} \partial_\mu \overline{\phi}^\dagger + \overline{\phi}^\dagger \partial_\mu \overline{\phi}) \\ \overline{\mathcal{L}}_{\text{interacción 2}} = q_e^2 \overline{A}_\mu \overline{A}^\mu \overline{\phi}^\dagger \overline{\phi} \end{cases}$$

con lo cual habrán dos tipos de “diagramas fundamentales” para esta teoría que son los siguientes: [7, fig. 8.3]

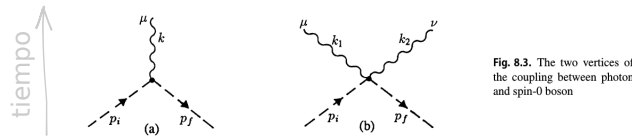
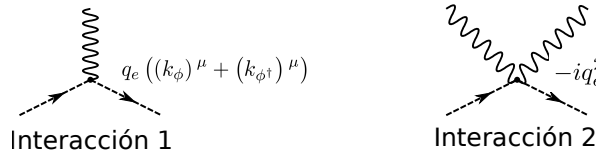


Fig. 8.3. The two vertices of the coupling between photon and spin-0 boson

Las líneas punteadas con flechas “hacia el futuro” representan bosones escalares y las líneas punteadas “hacia el pasado” son las antipartículas.

En base a lo que aprendí hoy en la clase de consultas los factores de multiplicación de cada uno de los vértices son



Para hallar los factores que acompañan a cada una de las patas (externas) se consideran las soluciones de la teoría libre

$$\text{Free theory solutions} \rightarrow \begin{cases} \overline{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \overline{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ \overline{\phi}(x)^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} + \overline{b}_{\mathbf{k}} e^{-ikx}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ \overline{A}^\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\lambda=0}^3 ((\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \overline{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \overline{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \end{cases}$$

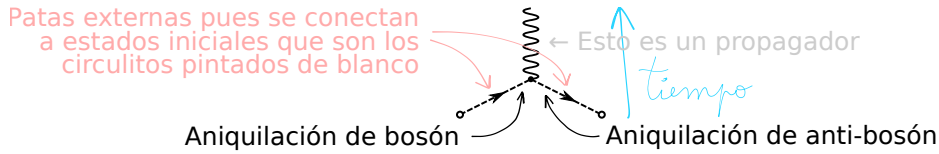
de donde se obtiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\phi^+(x)} = \int N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Aniquilación de bosón} \\ \overline{\phi^-(x)} = \int N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Creación de bosón} \\ \overline{\phi^+(x)}^\dagger = \int N_{\mathbf{k}}^{(\phi^\dagger)} \overline{b_{\mathbf{k}}} e^{-ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Aniquilación de anti-bosón} \\ \overline{\phi^-(x)}^\dagger = \int N_{\mathbf{k}}^{(\phi^\dagger)} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Creación de anti-bosón} \\ \overline{(A^+)^\mu(x)} = \int N_{\mathbf{k}}^{(A)} \sum_{\lambda=0}^3 \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}} (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu e^{-ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Aniquilación de fotón} \\ \overline{(A^-)^\mu(x)} = \int N_{\mathbf{k}}^{(A)} \sum_{\lambda=0}^3 \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}^\dagger (\varepsilon_{k,\lambda}^*)^\mu e^{ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Creación de fotón} \end{array} \right.$$

siendo

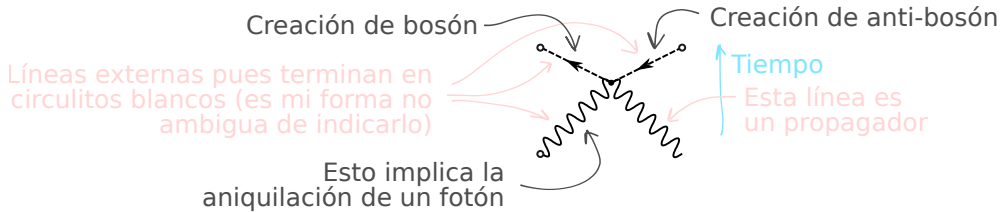
$$N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \quad N_{\mathbf{k}}^{(\phi^\dagger)} = N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \quad N_{\mathbf{k}}^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

Ahora el “truco” es que los factores que se asignan a cada línea son “las cosas que acompañan al correspondiente operador”. Por ejemplo considérese lo siguiente:



La pata externa de la izquierda se lee “viene un bosón y al llegar al vértice éste es aniquilado, pobrecito”. Entonces esta línea se corresponde con la aniquilación de un bosón con lo cual representa a $\overline{\phi^+(x)}$ y el factor multiplicativo es “todo lo que acompaña a $\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-ikx}$ dentro de la integral, es decir $N_{\mathbf{k}}^{(\phi)}$. Para la pata de la derecha la lectura es “viene un anti-bosón y se aniquila, que lástima!” con lo cual esta pata representa al factor multiplicativo $N_{\mathbf{k}}^{(\phi^\dagger)}$.

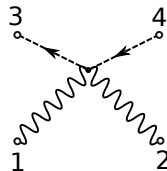
Este procedimiento se repite con todas las patas de la misma manera. Por ejemplo:



En este caso la aniquilación de un fotón implica el factor multiplicativo $N_{\mathbf{k}}^{(A)} (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu$, la creación del bosón es $N_{\mathbf{k}}^{(\phi)}$ y la creación del anti-bosón es $N_{\mathbf{k}}^{(\phi^\dagger)}$.

En cuanto a los propagadores, éstos son los que ya conocemos de las guías previas para el campo de Klein-Gordon complejo y para el campo de Maxwell.

Proceso de ejemplo Considérese el proceso $\gamma + \gamma \rightarrow \phi^\dagger + \phi$. El diagrama de Feynman es



y el factor asociado

$$2 (-iq_e^2) N_{\mathbf{k}_1}^{(A)} (\varepsilon_{k_1,\lambda_1})^\mu N_{\mathbf{k}_2}^{(A)} (\varepsilon_{k_2,\lambda_2})^\mu N_{\mathbf{k}_3}^{(\phi)} N_{\mathbf{k}_4}^{(\phi^\dagger)} (2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$$

donde el 2 del principio tiene que ver con el factor de simetría del diagrama (las líneas fotónicas se pueden intercambiar) y el $(2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$ es la conservación del momento.

Parte II

Parciales

Parcial del primer cuatrimestre de 2015

Problema 1 (probablemente esté todo mal)

Ítem a

Los generadores del grupo de Lorentz se pueden escribir, según consigna, como

$$\Sigma_{\nu\rho} = i(x_\nu\partial_\rho - x_\rho\partial_\nu) + (\Sigma^I)_{\nu\rho}$$

donde entiendo que $i(x_\nu\partial_\rho - x_\rho\partial_\nu)$ es la parte orbital (¿que genera las rotaciones?) y $(\Sigma^I)_{\nu\rho}$ la parte intrínseca (¿que genera los boost?). El vector de Pauli-Lubanski es entonces

$$\begin{aligned} W^\mu &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Sigma_{\nu\rho}P_\sigma \\ &= \frac{1}{2}i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(x_\nu\partial_\rho - x_\rho\partial_\nu)P_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\Sigma^I)_{\nu\rho}P_\sigma \end{aligned}$$

Ahora úsese la definición del símbolo de Levi-Civita

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{para permutaciones pares de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{para permutaciones impares de } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \end{cases}$$

Como se puede ver ε es antisimétrico en cualesquiera pares de índices y la parte orbital $(\Sigma^O)_{\nu\rho} = i(x_\nu\partial_\rho - x_\rho\partial_\nu)$ también. Entonces

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\Sigma^O)_{\nu\rho} = -\varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma}(\Sigma^O)_{\nu\rho} \iff \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\Sigma^O)_{\nu\rho} = 0$$

con lo cual

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\Sigma^I)_{\nu\rho}P_\sigma$$

Ítem b

En el caso de espinores de Dirac se tiene que

$$\text{Para espinores de Dirac} \rightarrow (\Sigma^I)_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

con lo cual las componentes espaciales de W serán

$$W^i = \frac{i}{4}\varepsilon^{i\nu\rho\sigma}[\gamma_\nu, \gamma_\rho]P_\sigma$$

Si el sistema está en reposo entonces la única traslación que sufre es temporal (?) con lo cual

$$\begin{aligned} W^i &= \frac{i}{4}\varepsilon^{i\nu\rho 0}[\gamma_\nu, \gamma_\rho]P_0 \leftarrow \text{Sistema en reposo} \\ \varepsilon^{ijk0} = \varepsilon^{ijk} \text{ según ayuda consigna} &\rightarrow = \frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}[\gamma_j, \gamma_k]P_0 \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} &\rightarrow = \frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}(-2\delta_{jk}\mathbb{1} - 2\gamma_k\gamma_j)P_0 \\ \left. \begin{aligned} \gamma^i &= \begin{bmatrix} \sigma_i & \\ -\sigma_i & \end{bmatrix} \\ \varepsilon^{ijj} &= 0 \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \frac{i}{2}\varepsilon^{ijk} \begin{bmatrix} \sigma_k\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_k\sigma_j \end{bmatrix} P_0 \end{aligned}$$

Problema 2

Ítem a

Debido a que la transformación $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$ tiene un único parámetro que es $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces existirá una única corriente de Noether asociada a esta transformación. La corriente de Noether J^μ satisfará

$$\text{Noether} \rightarrow \begin{cases} J^\mu \alpha = \left(\sum_{\forall \text{campos } \phi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right) - F^\mu \\ \delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \end{cases}$$

Por otro lado, el lagrangiano para el campo escalar complejo es

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

por lo tanto

$$\begin{cases} \phi' = (1 + i\alpha) \phi \\ \phi^{*'} = (1 - i\alpha) \phi^* \\ \delta \mathcal{L} = 0 \leftarrow \text{Es trivial} \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} J^\mu \alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \delta \phi^* + F^\mu \\ &= \partial^\mu \phi^* i\alpha \phi - \partial^\mu \phi i\alpha \phi^* + F^\mu \end{aligned}$$

Debido a que $\delta \mathcal{L} = 0$ entonces $F^\mu = 0$. Entonces la corriente de Noether es

$$J^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)$$

Para ver que J^μ se conserva, i.e.

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \rightarrow \text{Esto quiere decir que } J \text{ se conserva}$$

basta con hacer la cuenta:

$$\begin{aligned} -i\partial^\mu J_\mu &= \cancel{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*} + \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* - \cancel{\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi} - \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi \\ \left. \begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi &= 0 \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^* &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \phi m^2 \phi^* - \phi^* m^2 \phi \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

Entonces se encontró que

$$\begin{aligned} \partial^0 J_0 &= \partial^i J_i \\ \frac{\partial J^0}{\partial t} &= \nabla \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

siendo \mathbf{J} las componentes espaciales de J^μ . Integrando en todo el espacio y usando teorema de Gauss se encuentra que

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial J^0}{\partial t} d^3x &= \int \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x \\ \frac{\partial}{\partial t} \int J^0 d^3x &= \underbrace{\oint_{\partial \mathbb{R}^3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}}_{=0} \end{aligned}$$

con lo cual la integral $\int J^0 d^3x = Q$ se conserva, es decir que

$$Q = i \int (\phi \dot{\phi}^* - \dot{\phi} \phi^*) d^3x$$

es la carga conservada.

Ítem b

El campo escalar complejo se cuantiza según

$$\begin{cases} \overline{\phi(x)} = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}x} + \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x}) d^3k \\ \overline{\phi(x)}^\dagger = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x} + \overline{b_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}x}) d^3k \end{cases}$$

donde los operadores de creación y destrucción satisfacen

$$\begin{cases} [\overline{a_{\mathbf{k}}}, \overline{a_{\mathbf{k}'}}^\dagger] = [\overline{b_{\mathbf{k}}}, \overline{b_{\mathbf{k}'}}^\dagger] = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ \text{Cualquier otra da cero} \end{cases}$$

El operador de carga se convierte en

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= i \int (\overline{\phi} \dot{\overline{\phi}}^\dagger - \overline{\phi}^\dagger \dot{\overline{\phi}}) d^3x \\ &= \int d^3x \left[\int d^3k \int d^3q N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}x} + \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x}) N_{\mathbf{q}}^{(\phi)} i\omega_{\mathbf{q}} (\overline{a_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i\mathbf{q}x} - \overline{b_{\mathbf{q}}} e^{-i\mathbf{q}x}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \int d^3k \int d^3q N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x} + \overline{b_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}x}) N_{\mathbf{q}}^{(\phi)} i\omega_{\mathbf{q}} (-\overline{a_{\mathbf{q}}} e^{-i\mathbf{q}x} + \overline{b_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i\mathbf{q}x}) \right] \\ &= - \int d^3x \left[\int d^3k \int d^3q N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} N_{\mathbf{q}}^{(\phi)} \omega_{\mathbf{q}} (\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})x} - \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{q}}} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})x} + \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})x} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{q}}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})x} \right) - \int d^3k \int d^3q N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} N_{\mathbf{q}}^{(\phi)} \omega_{\mathbf{q}} (-\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{q}}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})x} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})x} + \dots \\ &\quad \left. \dots - \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{q}}} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})x} + \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})x}) \right] \\ \delta_D^3(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} d^3x \rightarrow &= -(2\pi)^3 \left[\int d^3k \int d^3q N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} N_{\mathbf{q}}^{(\phi)} \omega_{\mathbf{q}} (\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}})t} \delta_D^3(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{q}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{q}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \right) - \int d^3k \int d^3q N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} N_{\mathbf{q}}^{(\phi)} \omega_{\mathbf{q}} \dots \\ &\quad \dots \left(-\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{q}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{q}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}})t} \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}})t} \delta_D^3(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \right) \Big] \\ &= -(2\pi)^3 \left[\int d^3k \left(N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \right)^2 \omega_{\mathbf{k}} (\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger - \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{k}}} e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} - \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}}}) + \dots \right. \\ &\quad \left. - \int d^3k \left(N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \right)^2 \omega_{\mathbf{k}} (-\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} - \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}} e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger) \right] \\ [\overline{a_{\mathbf{k}}}, \overline{b_{\mathbf{k}}}] = 0 \rightarrow &= - \int d^3k \left(N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \right)^2 \omega_{\mathbf{k}} (\overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} - \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger - \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}}}) \end{aligned}$$

Como esto diverge ahora se pide que haya orden normal con lo cual

$$\begin{aligned} \overline{Q_{\text{que no diverge}}} &= : \overline{Q} : \\ &= -(2\pi)^3 \int d^3k \left(N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \right)^2 \omega_{\mathbf{k}} : \overline{a_{\mathbf{k}}} \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger + \overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} - \overline{b_{\mathbf{k}}} \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger - \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}}} : \\ &= -2(2\pi)^3 \int d^3k \left(N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \right)^2 \omega_{\mathbf{k}} (\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} - \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}}}) \\ N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3}} \rightarrow &= + \int (\overline{a_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}}} - \overline{b_{\mathbf{k}}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k}}}) d^3k \checkmark \end{aligned}$$

En algún lugar me comí un signo negativo pues me quedó al revés, pero bueno... Detalles.

El primero de los conmutadores que pide la consigna es

$$[\bar{Q}, \bar{\phi}] = \int d^3k \int d^3q N_q^{(\phi)} \left(\underbrace{[\bar{a}_k^\dagger \bar{a}_k, \bar{a}_q]}_{=0} e^{-iqx} + \underbrace{[\bar{a}_k^\dagger \bar{a}_k, \bar{b}_q^\dagger]}_{=0} e^{iqx} + \dots \right. \\ \left. \dots - \underbrace{[\bar{b}_k^\dagger \bar{b}_k, \bar{a}_q]}_{=0} e^{-iqx} - [\bar{b}_k^\dagger \bar{b}_k, \bar{b}_q^\dagger] e^{iqx} \right)$$

y si ahora se expande usando $\begin{cases} [ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \\ [\bar{a}_k, \bar{a}_{k'}^\dagger] = [\bar{b}_k, \bar{b}_{k'}^\dagger] = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{cases}$ se obtiene

$$[\bar{Q}, \bar{\phi}] = \int d^3k \int d^3q N_q^{(\phi)} (-\delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \bar{a}_k e^{-iqx} - \bar{b}_k^\dagger \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) e^{iqx}) \\ = - \int d^3k N_k^{(q)} (\bar{a}_k e^{-ikx} + \bar{b}_k^\dagger e^{iqx}) \\ = -\bar{\phi}$$

Para el otro conmutador no haré la cuenta, es similar, y me imagino que da

$$[\bar{Q}, \bar{\phi}^\dagger] = \bar{\phi}^\dagger$$

Entonces se tiene que

$$\begin{cases} \bar{Q} = \int (\bar{n}_k^{(a)} - \bar{n}_k^{(b)}) d^3k \\ \begin{cases} [\bar{Q}, \bar{\phi}] = -\bar{\phi} \\ [\bar{Q}, \bar{\phi}^\dagger] = \bar{\phi}^\dagger \end{cases} \end{cases}$$

Para interpretar esto calculo el valor medio de la carga en un estado $\bar{\phi} |0\rangle$, esto es

$$\langle \bar{Q} \rangle = \langle 0 | \bar{\phi}^\dagger \bar{Q} \bar{\phi} |0\rangle \\ = -\langle 0 | [\bar{Q}, \bar{\phi}^\dagger] \bar{Q} [\bar{Q}, \bar{\phi}] |0\rangle \\ = ?$$

No sé cómo usar esos conmutadores...

Ítem c

Debido a que la ecuación de movimiento de un operador es

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = -i [\bar{Q}, \bar{\mathcal{H}}] \rightarrow \text{Eq. de Heisenberg}$$

y debido a que \bar{Q} se conserva, yo esperarí que

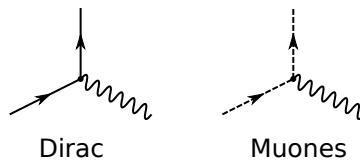
$$[\bar{Q}, \bar{\mathcal{H}}] = 0$$

La cuenta se la dejo a otro.

Problema 3

Ítem a

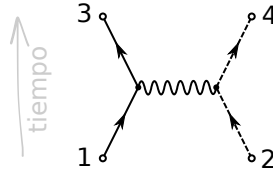
En base al lagrangiano de la consigna habrán dos nodos para esta teoría:



Utilizando estos dos vértices se deben armar los diagramas de Feynman de la teoría. Para el proceso

$$e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$$

el único diagrama (a orden más bajo no trivial) es



y el término asociado, según reglas de Feynman,

$$\mathcal{M} = \overline{u_{p_3, s_3}^{(\psi_1)}} (-iq_e \gamma^\mu) u_{p_1, s_1}^{(\psi_1)} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \overline{u_{p_4, s_4}^{(\psi_2)}} (-iq_e \gamma^\nu) u_{p_2, s_2}^{(\psi_2)}$$

Ítem b

La sección eficaz satisface

$$\begin{cases} \langle \text{final} | (\overline{\mathcal{S}} - \underline{\mathcal{I}}) | \text{inicial} \rangle = (2\pi)^4 \delta_D(p_1 + p_2 - p_{\text{final}}) \mathcal{M}_{fi} \left(\prod_{i=1}^n N_i \right) \\ d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta_D^4(p_1 + p_2 - p_{\text{final}})}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \left(\prod_{i=2}^n N_i^2 d^3 p_i \right) \end{cases}$$

Para calcular el $|\mathcal{M}|^2$ se procede del siguiente modo

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \left(\overline{u_{p_3, s_3}^{(\psi_1)}} (-iq_e \gamma^\mu) u_{p_1, s_1}^{(\psi_1)} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \overline{u_{p_4, s_4}^{(\psi_2)}} (-iq_e \gamma^\nu) u_{p_2, s_2}^{(\psi_2)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\overline{u_{p_3, s_3}^{(\psi_1)}} (-iq_e \gamma^\mu) u_{p_1, s_1}^{(\psi_1)} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \overline{u_{p_4, s_4}^{(\psi_2)}} (-iq_e \gamma^\nu) u_{p_2, s_2}^{(\psi_2)} \right)^\dagger \\ &= \underbrace{q_e^4 \frac{-i}{(p_1 - p_3)^2} \frac{i}{(p_1 - p_3)^2}}_{f(p_1, p_2, p_3, p_4)} (\overline{u_3} \gamma^\mu u_1 \eta_{\mu\nu} \overline{u_4} \gamma^\nu u_2) (\overline{u_3} \gamma^\rho u_1 \eta_{\rho\sigma} \overline{u_4} \gamma^\sigma u_2)^\dagger \\ &= f(p_1, p_2, p_3, p_4) \overline{u_3} \gamma^\mu u_1 \overline{u_4} \gamma_\mu u_2 u_2^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger \overline{u_4}^\dagger u_1^\dagger (\gamma_\nu)^\dagger \overline{u_3}^\dagger \\ (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \rightarrow &= f(p_1, p_2, p_3, p_4) \overline{u_3} \gamma^\mu u_1 \overline{u_4} \gamma_\mu u_2 \underbrace{u_2^\dagger \gamma^0}_{\overline{u_2}} \gamma^\nu \gamma^0 \underbrace{(u_4^\dagger \gamma^0)^\dagger}_{\overline{u_4}} \underbrace{u_1^\dagger \gamma_0}_{\overline{u_1}} \gamma_\nu \gamma_0 \underbrace{(u_3^\dagger \gamma^0)^\dagger}_{\overline{u_3}} \\ &= f(p_1, p_2, p_3, p_4) \overline{u_3} \gamma^\mu u_1 \overline{u_4} \gamma_\mu u_2 \overline{u_2} \gamma^\nu \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger u_4 \overline{u_1} \gamma_\nu \gamma_0 (\gamma^0)^\dagger u_3 \\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \end{array} \right\} &= f(p_1, p_2, p_3, p_4) \overline{u_3} \gamma^\mu u_1 \overline{u_1} \gamma_\nu u_3 \overline{u_4} \gamma_\mu u_2 \overline{u_2} \gamma^\nu u_4 \end{aligned}$$

Ahora se hace el truco de las trazas

$$|\mathcal{M}|^2 = f(p_1, p_2, p_3, p_4) \text{tr}(u_3 \overline{u_3} \gamma^\mu u_1 \overline{u_1} \gamma_\nu) \text{tr}(u_4 \overline{u_4} \gamma_\mu u_2 \overline{u_2} \gamma^\nu)$$

Ahora como no estamos interesados en la polarización decimos que “promediamos los espines iniciales y sumamos los finales” con lo cual

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{4} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \sum_{s_3=1}^2 \sum_{s_4=1}^2 \text{tr}(u_3 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma_\nu) \text{tr}(u_4 \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma^\nu) \\
 &= \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{4} \text{tr} \left(\left(\sum_{s_3} u_3 \bar{u}_3 \right) \gamma^\mu \left(\sum_{s_1} u_1 \bar{u}_1 \right) \gamma_\nu \right) \text{tr} \left(\left(\sum_{s_4} u_4 \bar{u}_4 \right) \gamma_\mu \left(\sum_{s_2} u_2 \bar{u}_2 \right) \gamma^\nu \right) \\
 \sum_{s=1}^2 u_{k,s} \bar{u}_{k,s} &= \frac{k+m}{2m} \rightarrow = \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{4} \text{tr} \left(\frac{\cancel{k}_3 + m_e}{2m_e} \gamma^\mu \frac{\cancel{k}_1 + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\nu \right) \text{tr} \left(\frac{\cancel{k}_4 + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\mu \frac{\cancel{k}_2 + m_e}{2m_e} \gamma^\nu \right) \\
 &= \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{4} \frac{1}{4m_e m_\mu} [\text{tr}(\cancel{k}_3 \gamma^\mu \cancel{k}_1 \gamma_\nu) + m_\mu \text{tr}(\cancel{k}_3 \gamma^\mu \gamma_\nu) + m_e \text{tr}(\gamma^\mu \cancel{k}_1 \gamma_\nu) + \dots \\
 &\quad \dots + m_e m_\mu \text{tr}(\gamma^\mu \gamma_\nu)] [\text{tr}(\cancel{k}_4 \gamma_\mu \cancel{k}_2 \gamma^\nu) + m_e \text{tr}(\cancel{k}_4 \gamma_\mu \gamma^\nu) + m_\mu \text{tr}(\gamma_\mu \cancel{k}_2 \gamma^\nu) + \dots \\
 &\quad \dots + m_\mu m_e \text{tr}(\gamma_\mu \gamma^\nu)]
 \end{aligned}$$

Ahora viene la “diracología” con las trazas de las γ . Primero

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\gamma^\mu \gamma_\nu) &= \eta_{\nu\rho} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho) \\
 \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} &\rightarrow = 4\eta_{\nu\rho} \eta^{\mu\rho} \\
 &= 4\delta^\mu_\nu
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\cancel{k}_i \gamma^\mu \cancel{k}_j \gamma_\nu) &= \text{tr}((k_i)^\rho \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\nu) \\
 &= (k_i)_\rho \eta_{\nu\sigma} \text{tr}(\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \\
 &\equiv 0
 \end{aligned}$$

y por último, usando $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho})$, se desarrolla

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\cancel{k}_i \gamma^\mu \cancel{k}_j \gamma_\nu) &= (k_i)_\rho (k_j)_\sigma \eta_{\nu\lambda} \text{tr}(\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\lambda) \\
 &= 4(k_i)_\rho (k_j)_\sigma \eta_{\nu\lambda} (\eta^{\rho\mu} \eta^{\sigma\lambda} - \eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\lambda} + \eta^{\rho\lambda} \eta^{\mu\sigma}) \\
 &= 4(k_i)_\rho (k_j)_\sigma (\eta^{\rho\mu} \delta^\sigma_\nu - \eta^{\rho\sigma} \delta^\mu_\nu + \eta^{\mu\sigma} \delta^\rho_\nu) \\
 &= 4((k_i)^\mu (k_j)_\nu - (k_i)^\sigma (k_j)_\sigma \delta^\mu_\nu + (k_i)_\nu (k_j)^\mu)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{4} \frac{1}{4m_e m_\mu} [4((k_3)^\mu (k_1)_\nu - (k_3)^\sigma (k_1)_\sigma \delta^\mu_\nu + (k_3)_\nu (k_1)^\mu) + 4m_e m_\mu \delta^\mu_\nu] \dots \\
 &\quad \dots [4((k_4)_\mu (k_2)^\nu - (k_4)^\sigma (k_2)_\sigma \delta^\nu_\mu + (k_4)^\nu (k_2)_\mu) + 4m_\mu m_e \delta^\nu_\mu] \\
 &= \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{m_e m_\mu} [(k_3 k_4) (k_1 k_2) - (k_4 k_2) (k_3 k_1) + (k_3 k_2) (k_1 k_4) + m_\mu m_e (k_3 k_1) + \dots \\
 &\quad \dots - (k_3 k_1) (k_4 k_2) + (k_3 k_1) (k_4 k_2) - (k_3 k_1) (k_4 k_2) - 4(k_3 k_1) m_\mu m_e + \dots \\
 &\quad \dots + (k_3 k_2) (k_1 k_4) - (k_3 k_1) (k_4 k_2) + (k_3 k_4) (k_1 k_2) + m_\mu m_e (k_3 k_1) + \dots \\
 &\quad \dots + m_e m_\mu (k_4 k_2) - 4m_e m_\mu (k_4 k_2) + m_e m_\mu (k_4 k_2) + 4(m_e m_\mu)^2] \\
 &= \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{m_e m_\mu} [2(k_3 k_4) (k_1 k_2) - 2(k_4 k_2) (k_3 k_1) + 2(k_3 k_2) (k_1 k_4) + \dots \\
 &\quad \dots - 2m_\mu m_e (k_3 k_1) - 2m_\mu m_e (k_4 k_2) + 4(m_e m_\mu)^2] \\
 &\stackrel{?}{=} \frac{f(p_1, p_2, p_3, p_4)}{m_e m_\mu} [2(k_1 k_2) (k_3 k_4) + 2(k_1 k_4) (k_2 k_3) - 2m_\mu^2 (k_1 k_3) - 2m_e^2 (k_2 k_4) + 4m_e^2 m_\mu^2]
 \end{aligned}$$

Este último paso me lo pasó un compañero alegando que está bien. Es más simétrico que el que me había quedado a mí así que le creo, para el ítem c. Entonces

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q_e^4}{(p_1 - p_3)^4} \frac{1}{m_e m_\mu} [2(k_1 k_2) (k_3 k_4) + 2(k_1 k_4) (k_2 k_3) - 2m_\mu^2 (k_1 k_3) - 2m_e^2 (k_2 k_4) + 4m_e^2 m_\mu^2]$$

La sección eficaz es entonces ASKODNSAPNDSOAKP

Parcial del primer cuatrimestre de 2016

Problema 1

Ítem a

Sea

$$w'(y) = Sw(\Lambda x)$$

el espinor boosteado, con $S = \exp\left(\frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\omega^{\mu\nu}\right)$ la matriz que aplica la transformación de Lorentz en el espacio de los espinores. Entonces lo que hay que mostrar es que

$$hw' = \frac{1}{2}w'$$

Para un boost en \hat{z} se tiene que (ver box 21)

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Para boost en } \hat{z}$$

con $\xi \in \mathbb{R}$ con lo cual

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\omega^{\mu\nu} &= \xi([\gamma_0, \gamma_3] - [\gamma_3, \gamma_0]) \rightarrow \text{Para boost en } \hat{z} \\ &= 2\xi[\gamma_0, \gamma_3] \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \rightarrow &= -4\xi\gamma_3\gamma_0 \\ &= 4\xi\gamma_0\gamma_3 \end{aligned}$$

Entonces la matriz de transformación de espinores es

$$\begin{aligned} S &= \exp\left(\frac{1}{2}\xi\gamma_0\gamma_3\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^k (\gamma_0\gamma_3)^k}{k!} \\ (\gamma_0\gamma_3)^k &= \begin{cases} \mathbf{1} & k=0 \\ \gamma_0\gamma_3 & k \text{ impar} \\ \mathbf{1} & k \text{ par} \end{cases} \rightarrow = \gamma_3\gamma_0 \sum_{k \text{ impar}} \frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^k}{k!} + (\gamma_0\gamma_3)^2 \sum_{k \text{ par}} \frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^k}{k!} \\ &= \mathbf{1} \cosh \frac{\xi}{2} + \gamma_0\gamma_3 \sinh \frac{\xi}{2} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \frac{\xi}{2} & 0 & \sinh \frac{\xi}{2} & 0 \\ 0 & \cosh \frac{\xi}{2} & 0 & -\sinh \frac{\xi}{2} \\ \sinh \frac{\xi}{2} & 0 & \cosh \frac{\xi}{2} & 0 \\ 0 & -\sinh \frac{\xi}{2} & 0 & \cosh \frac{\xi}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El espinor transformado es entonces

$$\begin{aligned} w'(y) &= Su_+e^{k'y} \leftarrow \begin{cases} (k')^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu k^\nu \\ y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu y^\nu \end{cases} \\ &= Su_+e^{ik'y} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cosh \frac{\xi}{2} \\ 0 \\ \sinh \frac{\xi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik'y} \end{aligned}$$

La aplicación del operador de helicidad implica conocer el k' , es decir

$$hw' = \Sigma w' \cdot \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|}$$

con

$$k' = \Lambda k \quad k^\mu = m\delta^\mu_0$$

La transformación Λ de Lorentz está dada por

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$$

siendo ω el mismo de antes y Σ los generadores dados por

$$\begin{aligned} \Sigma^{01} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \Sigma^{02} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \Sigma^{03} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma^{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \Sigma^{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \Sigma^{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ojo que estos Σ^{ij} NO son los Σ de $h = \Sigma \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$). Para un boost en $\hat{\mathbf{z}}$ vale que

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} &= \xi(\Sigma^{03} - \Sigma^{30}) \\ &= 2\xi\Sigma^{03} \\ &= 2\xi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \Lambda &= \exp(\xi\Sigma^{03}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} (\Sigma^{03})^k \\ (\Sigma^{03})^k &= \begin{cases} \mathbb{1} & k=0 \\ \Sigma^{03} & k \text{ impar} \\ \zeta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & k \text{ par} \end{cases} \rightarrow = \mathbb{1} + \Sigma^{03} \sum_{k \text{ impar}} \frac{\xi^k}{k!} + \zeta \sum_{k \text{ par}} \frac{\xi^k}{k!} \\ &= \mathbb{1} + \Sigma^{03} \sinh \xi + \zeta (-1 + \cosh \xi) \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{bmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

El vector de onda transformado es entonces

$$\begin{aligned} k' &= \begin{bmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= m \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ 0 \\ 0 \\ \sinh \xi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente la aplicación del operador de helicidad es

$$\begin{aligned}
 hw' &= \Sigma \cdot \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|} w' \\
 \mathbf{k}' = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh \xi \end{bmatrix} &\rightarrow = \Sigma_3 w' \\
 \Sigma_3 = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_0 \gamma_3 \text{ por consigna} &\rightarrow = \frac{1}{2} \frac{\gamma_5 \gamma_0 \gamma_3}{2} \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ 0 \\ \sinh \xi \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik'y} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ 0 \\ \sinh \xi \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik'y} \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ 0 \\ \sinh \xi \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik'y} \right)}_{w'}
 \end{aligned}$$

por lo tanto $hw' = \frac{1}{2}w' \checkmark$.

Ítem b

Un boost en x tiene

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \omega^{\mu\nu} \\
 &= i\xi [\gamma_0, \gamma_1] \\
 \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} &\rightarrow = -2i\xi \gamma^1 \gamma^0 \\
 &= 2i\xi \gamma^0 \gamma^1
 \end{aligned}$$

y entonces la matriz de transformación de espinores es

$$\begin{aligned}
 S &= \exp(\xi \gamma^0 \gamma^1) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} (\gamma^0 \gamma^1)^k \\
 (\gamma^0 \gamma^1)^k &= \begin{cases} \mathbb{1} & k \text{ par} \\ \gamma^0 \gamma^1 & k \text{ impar} \end{cases} \rightarrow = \mathbb{1} \sum_{k \text{ par}} \frac{\xi^k}{k!} + \gamma^0 \gamma^1 \sum_{k \text{ impar}} \frac{\xi^k}{k!} \\
 &= \mathbb{1} \cosh \xi + \gamma^0 \gamma^1 \sinh \xi \\
 &= \begin{bmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & \cosh \xi & \sinh \xi & 0 \\ 0 & \sinh \xi & \cosh \xi & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 w' &= Sw \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ 0 \\ 0 \\ \sinh \xi \end{bmatrix} e^{-ik'y}
 \end{aligned}$$

En cuanto a k' éste se transforma según

$$\begin{aligned} k' &= \Lambda k \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \xi & \sin \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= m \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ \sinh \xi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} hw' &= \Sigma \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} w' \\ &= \Sigma_1 w' \\ \Sigma_1 = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_0 \gamma_1 \text{ según consigna} \rightarrow &= \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_0 \gamma_1 w' \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ 0 \\ 0 \\ \sinh \xi \end{bmatrix} e^{-ik'y} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ \cosh \xi \\ \sinh \xi \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ik'y} \end{aligned}$$

por lo tanto no es autoestado, en consecuencia no está definida la helicidad.

Ítem c

El espinor del ítem (a) es

$$w' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cosh \xi \\ 0 \\ \sinh \xi \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik'y} \rightarrow \text{Del ítem (a)}$$

y éste es autoestado de la quiralidad si es autoestado de γ^5 . Esto es

$$\gamma^5 w' = \frac{e^{ik'y}}{2} \begin{bmatrix} \sinh \xi \\ 0 \\ \cosh \xi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver w' no es un autoestado de γ^5 . Sin embargo al tomar el límite ultra relativista se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{k^0 \gg m} \gamma^5 w' &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{ik'y}}{2} \begin{bmatrix} \sinh \xi \\ 0 \\ \cosh \xi \\ 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^5 e^\xi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik'y} &\sim e^\xi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik'y} \end{aligned}$$

y entonces ahora sí el estado w' es autoestado de γ^5 .

Ítem d (no me terminó de dar)

Los autovalores y autovectores de γ^5 son

Autovalor	Autovector
-1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Sea u un autoestado de γ^5 (i.e. uno de los cuatro autovectores previos). Considérese además un boost en la dirección x , y o z , la matriz que transforma el espinor es

$$\begin{aligned} S_i &= \exp(\xi \gamma^0 \gamma^i) \\ &= \mathbb{1} \cosh \xi + \gamma^0 \gamma^i \sinh \xi \\ &= \mathbb{1} \cosh \xi + \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i \\ -\sigma_i \end{bmatrix} \sinh \xi \\ &= \mathbb{1} \cosh \xi + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \sinh \xi \end{aligned}$$

siendo $i \in \{1, 2, 3\}$ que indica la dirección x, y, z del boost. Entonces el espinor transformado es

$$\begin{aligned} u' &= S_i u \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{1} \cosh \xi & \sigma_i \sinh \xi \\ \sigma_i \sinh \xi & \mathbb{1} \cosh \xi \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Al aplicarle el operador de quiralidad γ^5 a este espinor transformado obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma^5 u' &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}}^{\gamma^5} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \cosh \xi & \sigma_i \sinh \xi \\ \sigma_i \sinh \xi & \mathbb{1} \cosh \xi \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_i \sinh \xi & \mathbb{1} \cosh \xi \\ \mathbb{1} \cosh \xi & \sigma_i \sinh \xi \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Ahora habría que verificar que $\forall i \in \{x, y, z\}$ los autovectores y autovalores de esta matriz son los mismos que los de γ^5 para cualquier valor de $\xi \in \mathbb{R}$. Voy a considerar un caso puntual que es $i = x$:

$$\gamma^5 u' = \begin{bmatrix} 0 & \sinh \xi & \cosh \xi & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & \cosh \xi & \sinh \xi & 0 \end{bmatrix}$$

Bueno, no me da... Ya fue, estoy cansado.

Problema 2

Ítem a (Noether bien paso a paso ✓)

El lagrangiano asociado a un campo escalar clásico, neutral y masivo $\phi(x)$ es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

y frente a una transformación de simetría la carga conservada es $Q = \int_{\mathbb{R}^3} J^0 d^3x$ siendo J^μ las componentes de la corriente de Noether que está dada por

$$\begin{cases} J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - F^\mu & \rightarrow \text{Corriente de Noether} \\ \partial_\mu F^\mu = \delta \mathcal{L} & \rightarrow F^\mu \text{ se obtiene de acá} \end{cases}$$

En vistas de esto lo que hay que hacer es

1. Explicitar la rotación $x^\mu \rightarrow y^\mu$.

2. Calcular $\delta\phi$ y $\delta\mathcal{L}$.
3. Hallar la F^μ .
4. Calcular la carga conservada.

Una rotación espacial se parametriza mediante tres parámetros reales: e.g. los ángulos de Euler. Una rotación espacial es una transformación de la forma

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

donde

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

con $\mathcal{R} \in \mathbf{SO}(3)$. Las matrices \mathcal{R} se pueden expresar en términos de los generadores según

$$\mathcal{R} = e^{\text{generadores}}$$

siendo los generadores $\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matrices antisimétricas (ver box 4). Es decir que una rotación arbitraria se puede parametrizar según (ver box 11)

$$\mathcal{R} = \exp \left(\theta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

con $\theta_i \in \mathbb{R}$ tres parámetros.

Considerando el hecho de que las rotaciones son un subgrupo de \mathcal{L}_+^\uparrow voy a usar una notación que aparentemente está más difundida entre la bibliografía que es la de los $\omega^\mu{}_\nu$ (detallada en box 11). En esta notación se tiene que

$$\Lambda = e^\omega \quad \text{con } \omega^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\theta_3 & -\theta_2 \\ \xi_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \xi_3 & \theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\xi_i \in \mathbb{R}$ parametrizan boosts y $\theta_i \in \mathbb{R}$, como ya se dijo, las rotaciones. Eligiendo $\xi_i = 0$ se obtienen las rotaciones.

El cambio que la transformación de Lorentz induce en el campo es (cuenta paso a paso sin saltar nada ☺)

$$\begin{aligned} \phi'(x) = \phi(y) &= \phi(\Lambda x) \\ &= \phi(e^\omega x) \\ \text{Taylor en } \omega &\rightarrow \approx \underbrace{[(\phi(e^\omega x))]_{\omega=0}}_{\phi(x)} + \left[\frac{\partial \phi(e^\omega x)}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} \omega^\mu{}_\nu \\ \left[\frac{\partial \phi(e^\omega x)}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} &= \left[\frac{\partial \phi(e^\omega x)}{\partial (e^\omega x)^\sigma} \right]_{\omega=0} \left[\frac{\partial (e^\omega x)^\sigma}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} \rightarrow = \phi + \left[\frac{\partial \phi(e^\omega x)}{\partial (e^\omega x)^\sigma} \right]_{\omega=0} \left[\frac{\partial (e^\omega x)^\sigma}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} \omega^\mu{}_\nu \\ \left[\frac{\partial \phi(e^\omega x)}{\partial (e^\omega x)^\sigma} \right]_{\omega=\text{lo que quieras}} &\equiv \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\sigma} = \partial_\sigma \phi \rightarrow = \phi + \partial_\sigma \phi \left[\frac{\partial (e^\omega x)^\sigma}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} \omega^\mu{}_\nu \\ (e^\omega x)^\sigma &= (e^\omega)^\sigma{}_\lambda x^\lambda \rightarrow = \phi + \partial_\sigma \phi \left[\frac{\partial ((e^\omega)^\sigma{}_\lambda x^\lambda)}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} \omega^\mu{}_\nu \\ &= \phi + \partial_\sigma \phi \left[\frac{\partial (e^\omega)^\sigma{}_\lambda}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} x^\lambda \omega^\mu{}_\nu \\ &= \phi + \partial_\sigma \phi \left(\left[\frac{\partial e^\omega}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} \right)^\sigma{}_\lambda x^\lambda \omega^\mu{}_\nu \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial e^\omega}{\partial \omega^\mu{}_\nu} &= e^\omega \frac{\partial \omega}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \\ \omega \text{ y } e^\omega &\text{ son matrices!} \end{aligned} \right\} \rightarrow = \phi + \partial_\sigma \phi \left(\left[e^\omega \frac{\partial \omega}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} \right)^\sigma{}_\lambda x^\lambda \omega^\mu{}_\nu \\ \left(e^\omega \frac{\partial \omega}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right)^\sigma{}_\lambda &= (e^\omega)^\sigma{}_\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right)^\rho{}_\lambda = (e^\omega)^\sigma{}_\rho \frac{\partial \omega^\rho{}_\lambda}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \rightarrow = \phi + \partial_\sigma \phi \left[(e^\omega)^\sigma{}_\rho \frac{\partial \omega^\rho{}_\lambda}{\partial \omega^\mu{}_\nu} \right]_{\omega=0} x^\lambda \omega^\mu{}_\nu \\ \left. \begin{aligned} [(e^\omega)^\sigma{}_\rho]_{\omega=0} &= \delta^\sigma{}_\rho \\ \frac{\partial \omega^\rho{}_\lambda}{\partial \omega^\mu{}_\nu} &= \delta^\rho{}_\mu \delta^\nu{}_\lambda \end{aligned} \right\} \rightarrow = \phi + \partial_\sigma \phi \delta^\sigma{}_\rho \delta^\rho{}_\mu \delta^\nu{}_\lambda x^\lambda \omega^\mu{}_\nu \\ &= \phi + \partial_\mu \phi \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad \checkmark \end{aligned}$$

por lo que

$$\delta\phi = \partial_\mu\phi\omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

Sorprendentemente este resultado está bien, ver la referencia [4, eq. (1.51)] (Tong lo hace en tres renglones, ja).

En cuanto al cálculo de $\delta\mathcal{L}$, una transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow y^\mu$ induce un cambio en $\phi \rightarrow \phi'$ y en $\partial_\mu\phi \rightarrow (\partial_\mu\phi)'$ tal que el lagrangiano cambia según

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\phi, \partial_\mu\phi, x) &= \mathcal{L}(\phi', (\partial_\mu\phi)', y) \\ &\approx \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x) + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)}_{\delta\mathcal{L}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \end{aligned}$$

$\equiv 0$ para $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$

En consecuencia sólo falta encontrar el $\delta(\partial_\mu\phi)$. Para ello considero, primero, lo siguiente:

$$\begin{cases} x \rightarrow y & \rightarrow \text{Transformación de coordenadas} \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(y) & \rightarrow \text{Cambio que se induce en el campo} \\ \partial_\mu\phi = \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=x} \rightarrow (\partial_\mu\phi)' = \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=y} & \rightarrow \text{Cambio que se induce en } \partial_\mu\phi \end{cases}$$

es decir que

$$\begin{aligned} [(\partial_\mu\phi)']_x &= \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=y(x)} = \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=\Lambda x} = \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=e^\omega x} \\ \text{Taylor en } \omega &\rightarrow = \left[\left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=e^\omega x} \right]_{\omega=0} + \left[\frac{\partial}{\partial\omega^\alpha\beta} \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=e^\omega x} \right]_{\omega=0} \omega^\alpha\beta \\ \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=x} \equiv \partial_\mu\phi &\rightarrow = \partial_\mu\phi + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial\omega^\alpha\beta} \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=e^\omega x} \right]_{\omega=0}}_{\delta(\partial_\mu\phi)} \omega^\alpha\beta \\ &= \partial_\mu\phi + \left[\frac{\partial}{\partial(e^\omega x)^\sigma} \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=e^\omega x} \frac{\partial(e^\omega x)^\sigma}{\partial\omega^\alpha\beta} \right]_{\omega=0} \omega^\alpha\beta \end{aligned}$$

De la cuenta para $\delta\phi$ se sabe que $\frac{\partial(e^\omega x)^\sigma}{\partial\omega^\alpha\beta} = \dots = \delta^\sigma{}_\rho\delta^\rho{}_\alpha\delta^\beta{}_\lambda x^\lambda = \delta^\sigma{}_\alpha x^\beta$. Hay que calcular el otro término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(e^\omega x)^\sigma} \left[\frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=e^\omega x} &= \left[\frac{\partial}{\partial\zeta^\sigma} \frac{\partial\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu} \right]_{\zeta=e^\omega x} \\ &= \left[\frac{\partial^2\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu\partial\zeta^\sigma} \right]_{\zeta=e^\omega x} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} [(\partial_\mu\phi)']_x &= \partial_\mu\phi + \left[\left[\frac{\partial^2\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu\partial\zeta^\sigma} \right]_{\zeta=e^\omega x} \delta^\sigma{}_\alpha x^\beta \right]_{\omega=0} \omega^\alpha\beta \\ &= \partial_\mu\phi + \left[\frac{\partial^2\phi(\zeta)}{\partial\zeta^\mu\partial\zeta^\sigma} \right]_{\zeta=x} x^\beta\omega^\sigma{}_\beta \\ &= \partial_\mu\phi + \partial_\mu\partial_\sigma\phi\omega^\sigma{}_\beta x^\beta \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu\phi) &= \partial_\mu\partial_\sigma\phi\omega^\sigma{}_\beta x^\beta \\ &= \partial_\mu(\delta\phi) \end{aligned}$$

o bien, recordando que $\delta\phi = \partial_\mu\phi\omega^\mu{}_\nu x^\nu$,

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$$

En base a lo que consulté, este resultado $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ vale siempre para las transformaciones que vemos en el curso.

Usando estos resultados para $\delta\phi$ y $\delta(\partial_\mu\phi)$ se puede calcular

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \\ \mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 &\rightarrow = -m^2\phi(\delta\phi) + \partial^\mu\phi\overbrace{\partial_\mu(\delta\phi)}^{\delta(\partial_\mu\phi)} \\ \delta\phi = \partial_\mu\phi\omega^\mu{}_\nu x^\nu &\rightarrow = (\partial^\mu\phi\partial_\mu - m^2\phi)\partial_\sigma\phi\omega^\sigma{}_\xi x^\xi \\ &= (\partial_\mu(\partial_\sigma\phi)\partial^\mu\phi - m^2\phi\partial_\sigma\phi)\omega^\sigma{}_\xi x^\xi \\ \left. \begin{aligned} \phi\partial_\sigma\phi &= \frac{1}{2}\partial_\sigma(\phi^2) \\ [\partial_\mu, \partial_\sigma] &= 0 \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \left(\partial_\sigma(\partial_\mu\phi)\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\partial_\sigma\phi^2\right)\omega^\sigma{}_\xi x^\xi \\ \partial_\sigma\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) &= \frac{(\partial_\sigma\partial_\mu\phi)\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi(\partial_\sigma\partial^\mu\phi)}{2} &\rightarrow = \underbrace{\partial_\sigma\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right)}_{\mathcal{L}}\omega^\sigma{}_\xi x^\xi \end{aligned}$$

Según [4, eq. (1.53)] lo anterior debió quedar así:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

Obsérvese ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu) &= \partial_\mu\mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu\partial_\mu x^\nu \\ &= \partial_\mu\mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\mu \\ &= \partial_\mu\mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\mu \end{aligned}$$

y como ω es antisimétrico entonces $\omega^\mu{}_\nu = 0$ por lo tanto

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu)$$

Alta magia el truco previo.

Volviendo a la corriente de Noether se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^\mu &= \delta\mathcal{L} \\ &= \partial_\mu(\mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu) \end{aligned}$$

por lo tanto $F^\mu = \mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu$ y entonces la corriente de Noether es

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - F^\mu \\ \left. \begin{aligned} \delta\phi &= \partial_\mu\phi\omega^\mu{}_\nu x^\nu \\ F^\mu &= \mathcal{L}\omega^\mu{}_\nu x^\nu \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\alpha\phi\omega^\alpha{}_\beta x^\beta - \mathcal{L}\omega^\mu{}_\gamma x^\gamma \\ &= \omega^\alpha{}_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\alpha\phi - \delta^\mu{}_\alpha\mathcal{L}\right)x^\beta \\ &= \omega^\alpha{}_\beta T^\mu{}_\alpha x^\beta \end{aligned}$$

Recordemos ahora dos cosas:

- La forma de $\omega = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\theta_3 & -\theta_2 \\ \xi_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \xi_3 & \theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} y$

2. ω son seis parámetros infinitesimales, pero el teorema de Noether se aplica individualmente para cada uno de ellos.

Entonces como estamos interesados en las rotaciones consideramos $\xi_i \equiv 0$ y tenemos tres corrientes distintas para tres ω distintos:

$$\omega_1 = \theta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega_2 = \theta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega_3 = \theta_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir que tenemos las corrientes

$$(J_i)^\mu = (\omega_i)^\alpha{}_\beta T^\mu{}_\alpha x^\beta \quad \text{con } i \in \{1, 2, 3\}$$

Por teorema de Noether cada una de estas corrientes satisface

$$\partial_\mu (J_i)^\mu = 0$$

por lo tanto

$$L_i = \int_{\mathbb{R}^3} (J_i)^0 d^3x \rightarrow \text{Se conserva}$$

es una cantidad conservada. Esto es

$$L_i = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_i)^\alpha{}_\beta T^0{}_\alpha x^\beta d^3x$$

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \rightarrow = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_i)^\alpha{}_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_\alpha \phi - \delta^0{}_\alpha \mathcal{L} \right) x^\beta d^3x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \equiv \Pi \rightarrow = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_i)^\alpha{}_\beta (\Pi \partial_\alpha \phi - \delta^0{}_\alpha \mathcal{L}) x^\beta d^3x$$

Obsérvese ahora que, dada la peculiar expresión de ω_i , se tiene que $(\omega_i)^\alpha{}_\beta \delta^0{}_\alpha \equiv 0$ por lo que se puede tirar el segundo término y

$$L_i = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_i)^\alpha{}_\beta \partial_\alpha \phi x^\beta \Pi d^3x$$

Obsérvese ahora que $(\omega_i)^\alpha{}_\beta$ se puede escribir en términos del símbolo de Levi-Civita en cuatro dimensiones. En particular

se tiene que $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ es una permutación par de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ es una permutación impar de } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ por lo tanto, en forma explícita se tiene que

$$\varepsilon_{00\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{01\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{02\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{03k\ell} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que son exactamente (a menos de algún signo) los generadores de la rotación. Es decir que

$$(\omega_i)^\mu{}_\nu = \theta_i \varepsilon_{0i\rho\nu} \eta^\mu{}_\rho \leftarrow \text{El índice } i \text{ no se contrae, es fijo!}$$

$$= \theta_i \varepsilon_{0i}{}^\mu{}_\nu$$

(no me importa el signo pues queda absorbido en una redefinición del θ_i). Entonces

$$L_i = \int_{\mathbb{R}^3} \theta_i \varepsilon_{0i}{}^\alpha{}_\beta \partial_\alpha \phi x^\beta \Pi d^3x$$

Esto es lo más lejos que llegué, ya fue. Me quedó algo parecido, me falta un ϕ que esté multiplicando a la x^β . Tampoco sé cómo eliminar el $\theta_i \dots$ O cuándo debió haberse cancelado.

Problema 3

Ítem a

El lagrangiano es

$$\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}_{\text{Dirac}} + \overline{\mathcal{L}}_{\text{Klein-Gordon real}} - \lambda \overline{\psi} \psi \phi$$

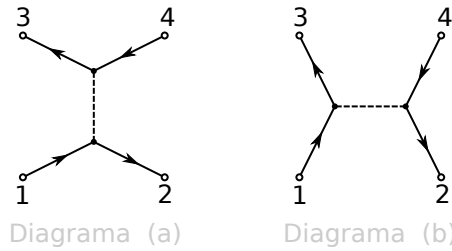
y como el término de interacción tiene un $\overline{\psi}$, un ψ y un ϕ entonces cada vértice tiene tres patas igual que en QED sólo que el fotón se reemplaza por un bosón escalar:



Proceso 1 El proceso

$$e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$$

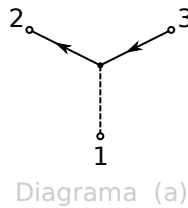
se representa al orden más bajo (no trivial) con los siguientes diagramas



Proceso 2 El proceso

$$\phi \rightarrow e^+e^-$$

se puede lograr sencillamente con el “vértice fundamental”, es decir



Para hallar la masa mínima de ϕ que permita que este proceso tenga lugar se plantea la conservación de cuadrivector. En el sistema centro de masa la partícula ϕ está en reposo con lo cual su cuadrivector es

$$p_{\text{inicial}} = \begin{bmatrix} m_\phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{En sistema centro de masa}$$

mientras que el final será

$$\begin{aligned} p_{\text{final}} &= p_1 + p_2 \\ &= (\Lambda_{\text{del electrón}} + \Lambda_{\text{del positrón}}) p_{\text{de un electrón en reposo}} \\ &= \left(\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_{e^-} \\ -\gamma\beta_{e^-} & \text{algo que no importa} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_{e^+} \\ -\gamma\beta_{e^+} & \text{algo que no importa} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} m_\psi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dado que tanto e^- como e^+ tienen la misma masa, entonces ambos “salen volando” con igual velocidad pero en direcciones opuestas, esto es

$$\beta_{e^-} = \beta_{e^+}$$

y entonces termina quedando

$$p_{\text{final}} = \begin{bmatrix} 2\gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{algo que no importa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_\psi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leftarrow \text{En sistema centro de masa}$$

La conservación de p impone ahora que

$$\begin{aligned} m_\phi &= 2\gamma m_\psi \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} m_\psi \end{aligned}$$

y como β podría valer, en principio, cualquier cosa entre 0 y 1 entonces entonces necesariamente

$$m_\phi \geq 2m_\psi$$

Ítem b (corroborar que esté bien)

Proceso 1 Para el proceso $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ la amplitud total es la suma de las amplitudes, i.e.

$$\langle \text{final} | \underline{\overline{S}} | \text{inicial} \rangle = \langle 0 | \overline{b_{\mathbf{k}_3, s_3}} \overline{d_{\mathbf{k}_4, s_4}} \underline{\overline{S}} \overline{b_{\mathbf{k}_1, s_1}} \dagger \overline{d_{\mathbf{k}_2, s_2}} \dagger | 0 \rangle$$

$$\text{Al orden más bajo} \rightarrow = \mathbb{1} + \overbrace{\text{Término asociado al diagrama (a)} + \text{Término asociado al diagrama (b)}}{\sim \lambda^2}$$

Para el diagrama (a) se tiene que

$$\begin{aligned} \text{(a)} &\equiv \overbrace{\text{Intercambio de vértices}}^2 \times \overbrace{\text{Multiplicidad}}^1 \times \overbrace{\text{Pata 1}}^{\text{aniquilación de } e^-} \times \overbrace{\text{Vértice}}^{-i\lambda} \times \overbrace{\text{Pata 2}}^{\text{aniquilación de } e^+} \times \dots \\ &\quad \dots \times i \overbrace{\text{Propagador}}^{\frac{1}{k^2 - m^2}} \times \overbrace{\text{Pata 3}}^{\text{emisión de } e^-} \times \overbrace{\text{Vértice}}^{-i\lambda} \times \overbrace{\text{Pata 4}}^{\text{emisión de } e^+} \times \overbrace{\text{Conservación de momento}}^{(2\pi)^4 \delta_D(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)} \\ &= 2(-i\lambda)^2 N_{\mathbf{k}_1}^{(\psi)} N_{\mathbf{k}_2}^{(\overline{\psi})} \overline{v_{p_2, s_2}} u_{k_1, s_1} \frac{i}{(k_1 + k_2)^2 - m_\phi^2} N_{\mathbf{k}_3}^{(\overline{\psi})} N_{\mathbf{k}_4}^{(\psi)} \overline{u_{p_3, s_3}} v_{p_4, s_4} (2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \end{aligned}$$

(en lo anterior el primer renglón es pictórico) donde

$$\begin{cases} N_{\mathbf{k}}^{(\psi)} = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \\ N_{\mathbf{k}}^{(\overline{\psi})} = N_{\mathbf{k}}^{(\psi)} \end{cases}$$

Para el diagrama (b) se tiene que

$$\text{(b)} \equiv 2(-i\lambda)^2 N_{\mathbf{k}_1}^{(\psi)} N_{\mathbf{k}_2}^{(\overline{\psi})} \overline{v_{p_2, s_2}} u_{k_1, s_1} \frac{i}{(k_1 + k_3)^2 - m_\phi^2} N_{\mathbf{k}_3}^{(\overline{\psi})} N_{\mathbf{k}_4}^{(\psi)} \overline{u_{p_3, s_3}} v_{p_4, s_4} (2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$$

Proceso 2 En el caso del proceso $e^+e^- \leftarrow \phi^\dagger$ la amplitud es

$$\langle \text{final} | \underline{\overline{S}} | \text{inicial} \rangle = \langle 0 | \overline{b_{\mathbf{k}_2}} \overline{d_{\mathbf{k}_3}} \underline{\overline{S}} \overline{a_{\mathbf{k}_1}} \dagger | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{A primer orden} \rightarrow &= \mathbb{1} + \overbrace{\text{El término asociado al único diagrama que hay}}{\sim \lambda^1} \\ &= (-i\lambda) N_{\mathbf{k}_1}^{(\phi)} N_{\mathbf{k}_2}^{(\overline{\psi})} N_{\mathbf{k}_3}^{(\psi)} \overline{u_{k_2, s_2}} v_{k_3, s_3} (2\pi)^4 \delta_D(k_1 - k_2 - k_3) \end{aligned}$$

Ítem c (cómo se hace la cuenta???)

La probabilidad del proceso es

$$|\langle \text{final} | \underline{\overline{S}} | \text{inicial} \rangle|^2 \sim |\mathbb{1} + \text{diagrama (a)} + \text{diagrama (b)}|^2 \leftarrow \text{Al orden más bajo}$$

El “término que proviene de aquel diagrama en que el momento del campo escalar virtual es la suma de los momentos de las partículas iniciales” entiendo que es el término asociado al diagrama (a) en el que el momento del propagador es justamente la suma de los momentos de las dos partículas iniciales. Es decir, interpreto que se pide calcular la $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ utilizando

$$\begin{aligned} |\langle \text{final} | \underline{\overline{S}} | \text{inicial} \rangle|^2 &\sim |\text{diagrama (a)}|^2 \leftarrow \text{Lo que pide la consigna} \\ &= \left| 2(-i\lambda)^2 N_{\mathbf{k}_1}^{(\psi)} N_{\mathbf{k}_2}^{(\overline{\psi})} \overline{v_{p_2, s_2}} u_{k_1, s_1} \frac{i}{(k_1 + k_2)^2 - m_\phi^2} N_{\mathbf{k}_3}^{(\overline{\psi})} N_{\mathbf{k}_4}^{(\psi)} \overline{u_{p_3, s_3}} v_{p_4, s_4} (2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \right|^2 \\ \left. \begin{aligned} N_{\mathbf{k}}^{(\psi)} &= \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \\ N_{\mathbf{k}}^{(\overline{\psi})} &= N_{\mathbf{k}}^{(\psi)} \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \left| 2(-i\lambda)^2 \frac{m^2 (2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)}{(2\pi)^6 \omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_3} \omega_{\mathbf{k}_4}} \frac{i}{(k_1 + k_2)^2 - m_\phi^2} \overline{v_{p_2, s_2}} u_{k_1, s_1} \overline{u_{p_3, s_3}} v_{p_4, s_4} \right|^2 \\ &= |f(k_1, k_2, k_3, k_4) \overline{v_{p_2, s_2}} u_{k_1, s_1} \overline{u_{p_3, s_3}} v_{p_4, s_4}|^2 \\ \left. \begin{aligned} \overline{v_{p_2, s_2}} &= \overline{v_2} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \rightarrow &= |f(k_1, k_2, k_3, k_4)|^2 \underbrace{(\overline{v_2} u_1 \overline{u_3} v_4) (\overline{v_2} u_1 \overline{u_3} v_4)^\dagger}_{\text{módulo al cuadrado}} \\ &= |f(k_1, k_2, k_3, k_4)|^2 \overline{v_2} u_1 \overline{u_3} v_4 v_4^\dagger \overline{u_3}^\dagger u_1^\dagger \overline{v_2}^\dagger \end{aligned}$$

Box 18 - Propiedad re copada de producto interno y traza del producto tensorial

Normalmente en esta instancia del problema se usa un truco, que en este caso particularmente no hay que usar pero igual lo dejo anotado pues me llevó rato darme cuenta cómo era.

Existe una fabulosa propiedad que es la de convertir un producto interno en la traza de un producto externo:

$$\begin{aligned} y^T x &= \text{tr}(xy^T) \\ x^\mu y_\mu &= \text{tr}(x^\mu y_\mu) \end{aligned}$$

La demostración de esto (y generalización) es muy sencilla. Sean $a, b, c, \dots \in \mathbb{C}^n$ unos “vectores”, entonces

$$a^\dagger b c^\dagger d \dots y^\dagger z = \text{tr}(z a^\dagger b c^\dagger d \dots y^\dagger) \leftarrow \text{Propiedad mágica}$$

Esta propiedad se puede entender muy fácilmente si se utiliza notación de índices:

$$\begin{aligned} a^\dagger b c^\dagger d \dots y^\dagger z &= a_\alpha b^\alpha c_\beta d^\beta \dots y_\xi z^\xi \\ &= z^\xi a_\alpha b^\alpha c_\beta d^\beta \dots y_\xi \end{aligned}$$

Como se puede ver el hecho de llevar a z “hacia adelante” hace que se pueda pensar que $z_\nu a^\alpha$ es una matriz, y de aquí en adelante son todas matrices. Y como los índices “externos” de esta gran matriz se contraen (ν) entonces le estamos tomando la traza.

Ahora como no estamos interesados en las polarizaciones (lo dice la consigna) lo que hacemos es sumar \forall las polarizaciones de entrada y promediar las de salida con un peso de $\frac{1}{2}$, esto es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{cuando no me importa la polarización}) &= \frac{1}{4} \sum_{\forall \text{ polarizaciones}} \mathbb{P}(\text{cuando sí me importa la polarización}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \sum_{s_3=1}^2 \sum_{s_4=1}^2 |\langle \text{final con } s_3, s_4 | \bar{\mathcal{S}} | \text{inicial con } s_1, s_2 \rangle|^2 \\ &= \frac{|f(k_1, k_2, k_3, k_4)|^2}{4} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \sum_{s_3=1}^2 \sum_{s_4=1}^2 \bar{v}_2 u_1 \bar{u}_3 v_4 v_4^\dagger \bar{u}_3^\dagger u_1^\dagger \bar{v}_2^\dagger \end{aligned}$$

Y ahora qué?

Fórmulas QFT

Box 19 - Identidades matemáticas

$$\delta_D(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} dt \quad \delta_D^3(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} d^3k \quad \delta_D^4(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{(2\pi)^4} d^4k$$

$$\eta e^M \eta = e^{\eta M \eta} \quad a^\dagger b c^\dagger d \dots y^\dagger z = \text{tr}(z a^\dagger b c^\dagger d \dots y^\dagger) \quad [ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$$

Box 20 - Notación de índices

$$\partial_\mu \phi \equiv \left[\frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \zeta^\mu} \right]_{\zeta=x} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda_\nu{}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \end{cases} \quad \partial_\mu \phi(y(x)) = \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \quad \begin{cases} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu \\ \frac{\partial \omega^{\rho\lambda}}{\partial \omega^{\mu\nu}} = \delta^\rho{}_\mu \delta^\lambda{}_\nu \end{cases}$$

Para tensores $x, T \rightarrow \begin{cases} x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \\ T^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} \\ \vdots \end{cases}$ Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz $\Rightarrow \begin{cases} (M^T)^\mu{}_\nu = M^\nu{}_\mu \\ (M^{-1})^\mu{}_\nu \neq M_\nu{}^\mu \end{cases}$

Box 21 - Fórmulas grupo de Lorentz

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \} \quad \mathcal{L} \stackrel{\text{sign}(\Lambda^0{}_0)}{\det(\Lambda)} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow & \rightarrow \mathbf{1} \in \mathcal{L}_+^\uparrow \\ P T \Lambda \in \mathcal{L}_+^\downarrow & \rightarrow \text{Reflexiones espacio-temporales} \\ P \Lambda \in \mathcal{L}_-^\uparrow & \rightarrow \text{Reflexiones espaciales} \\ T \Lambda \in \mathcal{L}_-^\downarrow & \rightarrow \text{Reflexiones temporales} \end{cases} \quad \begin{cases} P = \eta_{\mu\nu} \\ T = -P \end{cases}$$

$$\Lambda_\sigma{}^\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \delta_{\mu\nu} \Rightarrow (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \rightarrow \forall \Lambda \in \mathcal{L}$$

Generadores del grupo de Lorentz en el espacio de cuadrivectores

$$\Lambda = \begin{cases} e^{\xi_i K_i + \theta_i J_i} \\ e^{\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}} \\ e^{\omega^\mu{}_\nu} \end{cases} \quad \text{Lorentz algebra SO}(1, 3) \rightarrow \begin{cases} [J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] = -i \varepsilon_{ijk} J_k \end{cases}$$

$$[V^{\mu\nu}, V^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} V^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} V^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} V^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} V^{\nu\rho}) \leftarrow \text{Lorentz algebra SO}(1, 3)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Generadores} \rightarrow \\ \text{Parámetros} \rightarrow \end{array} \right. \begin{cases} K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \rightarrow \text{Boosts} \\ J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \rightarrow \text{Rotaciones} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_i \in \mathbb{R} & \text{parametizan los boosts} \\ \theta_i \in \mathbb{R} & \text{parametizan las rotaciones} \end{cases}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Generadores} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Sigma^{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma^{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ (\Sigma^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = -(\Sigma^{\nu\mu})^\rho{}_\sigma \end{array} \right. \\ \Sigma^{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma^{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\Sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \end{array} \right. \\ \text{Parámetros} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_{0i} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_i \text{ (parametrizan boosts)} \\ \omega_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_k \text{ (i, j, k cíclicos) (parametrizan rotaciones)} \\ \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \in \mathbb{R} \\ \omega^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(\Sigma^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \end{array} \right. \\ \omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ -\xi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\xi_3 & -\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \omega^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\theta_3 & -\theta_2 \\ \xi_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \xi_3 & \theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \end{array} \right.$$

Box 22 - Fórmulas formulación lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \rightarrow \text{Density} \quad L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \rightarrow \text{Lagrangian} \quad S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) d^4x \rightarrow \text{Action}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange} \quad \Pi_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} \rightarrow \text{Momento conjugado del campo } \phi_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J^\mu = \left(\sum_{\forall \text{campos } \phi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right) - F^\mu \\ \delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\forall \text{campos } \phi_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i \right) - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu \\ p^\mu = T^{0\mu} \rightarrow \text{4-momentum density} \end{array} \right. \\
 \text{Corriente de Noether} \qquad \qquad \qquad \text{Energy-momentum tensor}$$

Box 23 - Fórmulas Klein-Gordon

Campo real clásico

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2}{2} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(x) = \int N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-i k^\mu x_\mu} + a_{\mathbf{k}}^* e^{i k^\mu x_\mu} \right) d^3k \\ \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \end{array} \right.$$

Campo complejo (con carga) clásico

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^* = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) d^3k \\ \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \equiv k^0 \end{array} \right.$$

Klein-Gordon cuántico

$$\underline{\mathcal{L}} = \partial^\mu \bar{\phi}^\dagger \partial_\mu \bar{\phi} - m^2 \bar{\phi}^\dagger \bar{\phi}$$

$$N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3}}$$

$$\langle 0 | \underline{a}_{\mathbf{k}} \underline{a}_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})$$

Campo real $\rightarrow \underline{\phi(x)} = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\underline{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}) d^3k$

Campo complejo $\rightarrow \begin{cases} \underline{\phi(x)} = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\underline{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \underline{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}) d^3k \\ \underline{\phi(x)}^\dagger = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} + \underline{b}_{\mathbf{k}} e^{-ikx}) d^3k \end{cases}$

$$\left\{ \begin{aligned} [\underline{\phi(x,t)}, \underline{\Pi(y,t)}] &= [\underline{\phi(x,t)}^\dagger, \underline{\Pi(y,t)}^\dagger] = i\delta_D^3(x-y) \\ \text{Cualquier otra da cero} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} [\underline{a}_{\mathbf{k}}, \underline{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= [\underline{b}_{\mathbf{k}}, \underline{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ \text{Cualquier otra da cero} \end{aligned} \right.$$

$$i\Delta_F(x-y) = \begin{cases} \langle 0 | T(\underline{\phi(x)} \underline{\phi(y)}^\dagger) | 0 \rangle \\ \int N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} (\Theta_H(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \Theta_H(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)}) d^3k \\ \int_{\mathcal{C}_F} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ \frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \text{Propagador en espacio de momentos} \end{cases} \quad \phi \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} \underline{\phi^+}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \underline{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} d^3k \\ \underline{\phi^-}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\phi)} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} d^3k \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_{\mathbf{k}} (\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{a}_{\mathbf{k}} + \underline{a}_{\mathbf{k}} \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \underline{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{b}_{\mathbf{k}} + \underline{b}_{\mathbf{k}} \underline{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) d^3k && \rightarrow \text{Hamiltonian} \\ \underline{\mathbf{P}} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k} (\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{a}_{\mathbf{k}} + \underline{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{b}_{\mathbf{k}}) d^3k && \rightarrow \text{Total 3-momentum} \\ \underline{\mathbf{L}} &= i \int_{\mathbb{R}^3} [\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \underline{a}_{\mathbf{k}} + \underline{b}_{\mathbf{k}}^\dagger (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \underline{b}_{\mathbf{k}}] d^3k && \rightarrow \text{Total 3-momentum} \\ \underline{Q} &= \int_{\mathbb{R}^3} (\underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{a}_{\mathbf{k}} - \underline{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \underline{b}_{\mathbf{k}}) d^3k && \rightarrow \text{Total charge} \end{aligned} \right.$$

Box 24 - Fórmulas Dirac

Dirac clásico

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi && \begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 & \leftarrow \text{Dirac} \\ \bar{\psi} (i\overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + m) = 0 & \leftarrow \text{Adjunta} \end{cases} && \begin{cases} S(\Lambda) = e^{\frac{-i}{2} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}} \\ \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{cases} \\ \bar{\psi} &\stackrel{\text{def}}{=} \psi^\dagger \gamma^0 && \leftarrow \text{Dirac adj.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = P_0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi d^3x && \mathbf{L} = -i \int \psi^\dagger \mathbf{x} \times \nabla \psi d^3x \rightarrow \text{Angular momentum} \\ \mathbf{P} &= -i \int \psi^\dagger \nabla \psi d^3x \rightarrow \text{Linear momentum} && \mathbf{S} = \frac{1}{2} \int \psi^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \psi d^3x \rightarrow \text{Spin} \\ Q &= \int \psi^\dagger \psi d^3x \rightarrow \text{Charge} && \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \rightarrow \text{En representación estándar (?)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P_\nu = \int_{\mathbb{R}^3} \Theta_{0\nu} d^3x \rightarrow \text{Four momentum} \\ \Theta_{\mu\nu} = \bar{\psi} i\gamma_\mu \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \bar{\psi} (i\gamma^\sigma \partial_\sigma - m) \psi \rightarrow \text{Energy-momentum tensor} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \leftarrow \text{Clifford} \\ (\gamma^\mu)^2 = \mathbb{1}\eta^{\mu\mu} \\ (\gamma^\mu)^\dagger = \begin{cases} -\gamma^\mu & \text{para } \mu \neq 0 \\ \gamma^\mu & \text{para } \mu = 0 \end{cases} \\ (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \\ \gamma^5 \stackrel{\text{def}}{=} i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Rep. de Dirac} \rightarrow \gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \\ \text{Rep. quiral (Weyl)} \rightarrow \gamma^0 = \begin{bmatrix} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix} \\ \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{cases} \end{array}$$

Espinores

$$\overbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \begin{Bmatrix} u_{k,s} e^{-ikx} \\ v_{k,s} e^{ikx} \end{Bmatrix}}^{\text{Eq. de Dirac}} = 0 \quad \text{En rep. de Dirac} \rightarrow \begin{cases} u_{k,s} = \begin{bmatrix} \xi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}+m}} \xi_s \end{bmatrix} \\ v_{k,s} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}+m}} \xi_s \\ \xi_s \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Normalización

$$\begin{cases} \overline{u_{k,r}} u_{k,s} = \delta_{rs} \\ \overline{v_{k,r}} v_{k,s} = -\delta_{rs} \\ \overline{u_{k,r}} v_{k,s} = \overline{v_{k,r}} u_{k,s} = 0 \end{cases}$$

Ortogonalidad

$$\begin{cases} u_{k,r}^\dagger u_{k,s} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{m} \delta_{rs} \\ v_{k,r}^\dagger v_{k,s} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{m} \delta_{rs} \\ u_{k,s}^\dagger v_{\eta \mathbf{k},s} = v_{k,s}^\dagger u_{\eta \mathbf{k},s} = 0 \quad \eta \mathbf{k} \equiv (k^0, -\mathbf{k}) \end{cases}$$

Producto externo

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^2 u_{k,s} \overline{u_{k,s}} = \frac{\not{k} + m}{2m} \\ \sum_{s=1}^2 v_{k,s} \overline{v_{k,s}} = \frac{\not{k} - m}{2m} \end{cases}$$

Cuantización Dirac

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \overline{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)}, \overline{\psi_\beta(\mathbf{y}, t)}^\dagger \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta_D^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \text{Cualquier otro da cero} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \overline{b_{\mathbf{k},r}}, \overline{b_{\mathbf{p},s}}^\dagger \right\} = \left\{ \overline{d_{\mathbf{k},r}}, \overline{d_{\mathbf{p},s}}^\dagger \right\} = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{rs} \\ \text{Cualquier otro da cero} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\psi(x)} = \sum_{s=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\psi)} \left(\overline{b_{\mathbf{k},s}} u_{k,s} e^{-ikx} + \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger v_{k,s} e^{ikx} \right) d^3k \\ \overline{\overline{\psi(x)}} = \sum_{s=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(\psi)} \left(\overline{b_{\mathbf{k},s}}^\dagger \overline{u_{k,s}} e^{ikx} + \overline{d_{\mathbf{k},s}} \overline{v_{k,s}} e^{-ikx} \right) d^3k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} N_{\mathbf{k}}^{(\psi)} = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \\ \langle 0 | \overline{b_{\mathbf{k},s}} \overline{b_{\mathbf{p},r}}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{sr} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\ \langle 0 | \overline{d_{\mathbf{k},s}} \overline{d_{\mathbf{p},r}}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{rs} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\psi^+(x)} = \sum_{s=1}^2 \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \overline{b_{\mathbf{p},s}} u_{p,s} e^{-ipx} d^3p \leftarrow e^- \text{ absorption} \\ \overline{\psi^-(x)} = \sum_{s=1}^2 \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \overline{d_{\mathbf{p},s}}^\dagger v_{p,s} e^{ipx} d^3p \leftarrow e^+ \text{ emission} \\ \overline{\overline{\psi^+(x)}} = \sum_{s=1}^2 \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \overline{d_{\mathbf{p},s}} \overline{v_{p,s}} e^{-ipx} d^3p \leftarrow e^+ \text{ absorption} \\ \overline{\overline{\psi^-(x)}} = \sum_{s=1}^2 \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \overline{b_{\mathbf{p},s}}^\dagger \overline{u_{p,s}} e^{ipx} d^3p \leftarrow e^- \text{ emission} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \overline{P} = \sum_{s=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} k^\mu \left(\overline{b_{\mathbf{k},s}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k},s}} - \overline{d_{\mathbf{k},s}} \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ \overline{Q} = \sum_{s=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{b_{\mathbf{k},s}}^\dagger \overline{b_{\mathbf{k},s}} + \overline{d_{\mathbf{k},s}} \overline{d_{\mathbf{k},s}}^\dagger \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \end{array}$$

$$\text{Propagador} \rightarrow i(S_F(x-y))_{\alpha\beta} = \begin{cases} \langle 0 | T \left(\overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} \right) | 0 \rangle = \begin{cases} \overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} & x^0 > y^0 \\ -\overline{\psi_\beta(y)} \overline{\psi_\alpha(x)} & x^0 < y^0 \end{cases} \\ (i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x-y) \\ \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ \frac{1}{\not{k} - m} \rightarrow \text{Propagador en espacio de momentos} \end{cases}$$

Box 25 - Fórmulas Proca y Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{4} + \frac{m^2}{2}Z_\mu Z^\mu \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \\ \partial_\mu Z^\mu = 0 \rightarrow \text{Transversalidad, le da espín 1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{4} \rightarrow \text{Este no se cuantiza!} \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \text{Gauge de Lorenz} \end{array} \right.$$

Este se cuantiza! $\rightarrow \mathcal{L}_{\text{Gupta-Bleuler}} = -\frac{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{4} + \lambda(\partial_\mu A^\mu)^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{Z}^\mu = \sum_{\lambda=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(Z)} (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \left(\overline{a_{\mathbf{k},\lambda}} e^{-ikx} + \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}^\dagger e^{ikx} \right) d^3k \rightarrow \text{Proca} \\ \overline{A}^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \int_{\mathbb{R}^3} N_{\mathbf{k}}^{(A)} (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu \left(\overline{a_{\mathbf{k},\lambda}} e^{-ikx} + \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}^\dagger e^{ikx} \right) d^3k \rightarrow \text{Maxwell} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{\mathbf{k}}^{(Z)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \\ N_{\mathbf{k}}^{(A)} = N_{\mathbf{k}}^{(Z)} \end{array} \right.$$

Sólo Proca $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\lambda=1}^3 (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu (\varepsilon_{k,\lambda})^\nu = -\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \right) \rightarrow \text{Completitud} \\ \left\{ \begin{array}{l} k^\mu k_\mu = m^2 \\ k^\mu (\varepsilon_{k,\lambda})_\mu = 0 \\ (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu (\varepsilon_{k,\sigma})_\mu = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{Ortogonalidad} \end{array} \right.$

$$\sum_{\lambda=0}^3 (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu (\varepsilon_{k,\lambda})^\nu = \eta^{\mu\nu} \rightarrow \forall \text{ base ortonormal} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Pi}^\mu = \partial^0 \overline{Z}^\mu - \partial^\mu \overline{Z}^0 \equiv \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \overline{Z}_\mu)} \\ \overline{\Pi}^0 \equiv 0 \rightarrow \text{Both for Proca and Maxwell} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\overline{Z}_i(x), \overline{\Pi}_j(y)] = i\delta_D(x-y)\delta_{ij} \\ [\overline{A}_\mu(x), \overline{\Pi}^\nu(y)] = i\delta_D^3(x-y)\delta^\nu_\mu \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [\overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}, \overline{a_{\mathbf{k}',\lambda'}}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_D^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \rightarrow \text{Proca} \\ [\overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}, \overline{a_{\mathbf{k}',\lambda'}}^\dagger] = -\eta_{\lambda\lambda'}\delta_D^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \rightarrow \text{Maxwell} \end{array} \right.$$

Maxwell propagator $\rightarrow i(D_F(x-y))^{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{l} \langle 0|T(\overline{A}^\mu(x)\overline{A}^\nu(y))|0\rangle \rightarrow \text{Definición} \\ \int \frac{-\eta^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ \frac{-\eta^{\mu\nu}}{k^2} \text{ en espacio de } k \end{array} \right.$

Box 26 - Fórmulas scattering

$$\mathbb{P}(|\text{inicial}\rangle \rightarrow |\text{final}\rangle) = \left| \langle \text{final} | \overline{U_{+\infty \leftarrow -\infty}} | \text{inicial} \rangle \right|^2 = \left| \langle \text{final}_I | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial}_I \rangle \right|^2$$

$$\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}_0 + \overline{\mathcal{L}}_1 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\Pi} \partial_0 \overline{\phi} - \overline{\mathcal{L}} \rightarrow \text{Definición} \\ \overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}_0 - \overline{\mathcal{L}}_1 \rightarrow \text{Cuando } \overline{\mathcal{L}}_1 \text{ no tiene derivadas (i.e. siempre)} \end{array} \right.$$

Interaction picture $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\psi_I(t)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} |\psi(t)\rangle \\ \overline{A}_I(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} \overline{A} e^{-i\overline{\mathcal{H}}_0 t} \end{array} \right. \quad \overline{U_{t \leftarrow t_0}} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\overline{\mathcal{H}}_0 t} e^{-i\overline{\mathcal{H}}(t-t_0)} e^{-i\overline{\mathcal{H}}_0 t}$

$$\overline{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 \dots \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_n T \left(: \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_1) : , : \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_2) : , \dots , : \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x_n) : \right) \\ T \left(e^{-i \int : \overline{\mathcal{H}}_{1I}(x) : d^4x} \right) \\ \overline{\mathbb{I}} + \overline{\mathbb{T}} \leftarrow \text{Esto es sólo notación} \end{array} \right.$$

Teorema de Wick

$T(\overline{\phi(x_1)}, \overline{\phi(x_2)}, \dots, \overline{\phi(x_n)}) =: \overline{\phi(x_1)}, \overline{\phi(x_2)}, \dots, \overline{\phi(x_n)} : + \sum$: todas las posibles contracciones :

$$\text{Contracción} \rightarrow \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} [\overline{\phi^+(x)}, \overline{\phi^-(y)}] & \text{para } x^0 > y^0 \\ [\overline{\phi^+(y)}, \overline{\phi^-(x)}] & \text{para } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Box 27 - Reglas de Feynman para teoría $\lambda\phi^4$ con ϕ real (para matriz de scattering)

Todo lo que sigue se aplica al cálculo de elementos de la matriz de scattering $\langle \text{final} | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial} \rangle$. Quizá sirva para otras cosas pero de momento no lo sé.

1. El orden del diagrama (i.e. λ^{orden}) es igual al número de vértices del mismo.
2. El número de líneas que convergen a cada vértice es 4 porque $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}_0 + \lambda \overline{\phi}^4$.

Una vez que ya se ha dibujado un diagrama, la forma de encontrar el término asociado es la siguiente:

1. Asignar cuádrimomentos:
 - a) Asignar un cuádrimomento k a cada línea externa,
 - b) y q a cada línea interna.

Usar flechas para indicar el sentido de flujo de momento de cada línea, tal como si se tratase de un circuito eléctrico y las corrientes eléctricas. El sentido de circulación de las líneas externas está fijo (partículas iniciales entran y partículas finales salen) mientras que el de las líneas internas es arbitrario.

2. Multiplicar los siguientes factores:
 - a) Por cada línea interna: $\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$ donde q es el momento de dicha línea.
 - b) Por cada vértice: $(-i\lambda) \delta_D(\sum q_i)$ donde q_i son todos los momentos que convergen al vértice con su respectivo signo según si es entrante o saliente. Aquí los q_i podrían ser k_i si hubieran líneas externas.
 - c) Por cada línea externa: $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \omega_k}}$.
 - d) $[(2\pi)^4]^{\#\text{vértices} - \#\text{líneas internas}}$.
 - e) Factor de simetría (aún no sé con exactitud qué es esto).
3. Integrar $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ sobre todas las q correspondientes a líneas internas.

Box 28 - Fórmulas QED

$$\overline{\mathcal{L}}_{\text{QED}} = \underbrace{\overline{\psi} (i\not{\partial} - m) \overline{\psi}}_{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}} - \underbrace{\frac{\overline{F^{\mu\nu}} F_{\mu\nu}}{4}}_{\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}} - \underbrace{q_e \overline{\psi} \not{A} \overline{\psi}}_{\mathcal{L}_{\text{Coupling}}}$$

Feynman rules for QED in momentum space (notación: p es para fermiones y k para fotones).

1. Líneas externas:
 - a) Incoming electron: $N_{\mathbf{p}} u_{p,s}$.
 - b) Incoming positron: $N_{\mathbf{p}} \overline{v}_{p,s}$.
 - c) Outgoing electron: $N_{\mathbf{p}} \overline{u}_{p,s}$.

- d) Outgoing positron: $N_{\mathbf{p}} v_{p,s}$.
- e) Incoming photon: $N_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu$.
- f) Outgoing photon: $N_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{k,\lambda}^*)^\mu$.

2. Vértice: $-iq_e \gamma_\mu$.

3. Líneas internas:

- a) Fotón: $4\pi i (D_F(k))^{\mu\nu}$.
- b) Fermión: $4\pi i S_F(p)$.

4. Imponer conservación global de momento agregando una $\delta_D^4(p_{\text{inicial}} - p_{\text{final}})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}}}} \quad \rightarrow \text{Para fermiones} \\ N_{\mathbf{k}}^{(A)} = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \quad \rightarrow \text{Para fotones} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (D_F(k))^{\mu\nu} = \frac{-\eta^{\mu\nu}}{k^2} \quad \leftarrow \text{Campo de Maxwell} \\ S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \quad \leftarrow \text{Campo de Dirac} \end{array} \right.$$

$$\overline{A^\mu(x)} = \overline{(A^+)^\mu(x)} + \overline{(A^-)^\mu(x)} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{(A^+)^\mu(x)} = \int N_{\mathbf{k}}^{(A)} \sum_{\lambda=0}^3 \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}} (\varepsilon_{k,\lambda})^\mu e^{-ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Photon absorption} \\ \overline{(A^-)^\mu(x)} = \int N_{\mathbf{k}}^{(A)} \sum_{\lambda=0}^3 \overline{a_{\mathbf{k},\lambda}}^\dagger (\varepsilon_{k,\lambda}^*)^\mu e^{ikx} d^3k \quad \leftarrow \text{Photon emission} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\psi(x)} = \overline{\psi^+(x)} + \overline{\psi^-(x)} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{\psi^+(x)} = \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \sum_{s=1}^2 \overline{b_{\mathbf{p},s}} u_{p,s} e^{-ipx} d^3p \quad \leftarrow \text{Electron absorption} \\ \overline{\psi^-(x)} = \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \sum_{s=1}^2 \overline{d_{\mathbf{p},s}}^\dagger v_{p,s} e^{ipx} d^3p \quad \leftarrow \text{Positron emission} \end{array} \right. \\ \overline{\overline{\psi(x)}} = \overline{\overline{\psi^+(x)}} + \overline{\overline{\psi^-(x)}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{\psi^+(x)}} = \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \sum_{s=1}^2 \overline{d_{\mathbf{p},s}} v_{p,s} e^{-ipx} d^3p \quad \leftarrow \text{Positron absorption} \\ \overline{\overline{\psi^-(x)}} = \int N_{\mathbf{p}}^{(\psi)} \sum_{s=1}^2 \overline{b_{\mathbf{p},s}}^\dagger u_{p,s} e^{ipx} d^3p \quad \leftarrow \text{Electron emission} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Box 29 - Sección eficaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{final} | (\overline{\mathcal{S}} - \overline{\mathbb{1}}) | \text{inicial} \rangle = (2\pi)^4 \delta_D^4(p_1 + p_2 - p_{\text{final}}) \mathcal{M}_{fi} \left(\prod_{i=1}^n N_i \right) \\ d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta_D^4(p_1 + p_2 - p_{\text{final}})}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \left(\prod_{i=2}^n N_i^2 d^3p_i \right) \end{array} \right.$$

■ Promediar iniciales, sumar finales.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\not{k}\not{q}) &= 4k_\mu q^\mu & \text{tr}(\gamma^5) &= 0 & \text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu) &= 0 & \text{tr}(\gamma^5 \not{k}\not{q}) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu} & \text{tr}(\#_{\text{impar}}) &= 0 & \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \\ \text{tr}(a_1 a_2 \dots a_{2n}) &= a_1 a_2 \text{tr}(a_3 \dots a_{2n}) - a_1 a_3 \text{tr}(a_2 \dots a_{2n}) + \dots + a_1 a_{2n} \text{tr}(a_2 \dots a_{2n-1}) \\ \text{tr}(ab\cancel{c}d) &= 4(ab)(cd) - 4(ac)(bd) + 4(ad)(bc) \\ \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4\mathbb{1} & \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2\not{a} & \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4(ab)\mathbb{1} & \gamma_\mu \not{a} \gamma^\nu \not{b} \gamma^\mu &= -2\not{a} \gamma^\nu \not{b} & \gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= -2\not{c} \not{b} \not{a} \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} d \gamma^\mu &= 2\not{a} \not{b} \not{c} d + 2\not{c} \not{b} \not{a} d \end{aligned}$$

Referencias

- [1] Franz Schwabl. *Advanced quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 3 edition, 2005.
- [2] Someone. Lorentz group and lorentz invariance. <https://gdenittis.files.wordpress.com/2016/04/ayudantiavi.pdf>.
- [3] Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 1 edition, 2014.
- [4] David Tong. Quantum field theory. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>.
- [5] Peskin and Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*.
- [6] Reinhardt Greiner. *Field Quantization*. Springer, 1996.
- [7] Reinhardt Greiner. *Quantum Electrodynamics*. Springer, 4 edition, 2009.